

ORCHESTRATEUR

Matematica - Definire, dimostrare, calcolare e interpretare

Una guida approfondita, disponibile offline

Leggere, capire, ritrovare un capitolo

LAFAYETTE DIGITAL PRODUCTS

Sommario

Le voci del sommario sono cliccabili. I segnalibri del PDF consentono di accedere a capitoli e sezioni. Il collegamento in fondo a ogni pagina riporta qui.

Capitolo 1 - Dal problema alla dimostrazione: domini, implicazioni e controesempi 7

Capitolo 2 - Successioni e induzione: comprendere l’evoluzione discreta 17

Capitolo 3 - Limiti: stabilire un comportamento senza confondere calcolo e dimostrazione 26

Capitolo 4 - Continuità: dimostrare esistenza, unicità e delimitazioni 35

Capitolo 5 - Derivazione e ottimizzazione: dalla variazione locale alla conclusione 45

Capitolo 6 - Convessità: confrontare una curva, le sue corde e le sue tangenti 54

Capitolo 7 - Esponenziali, logaritmi e trigonometria: trasformare senza perdere il dominio 64

Capitolo 8 - Primitive e integrali: misurare un’accumulazione e controllare un’approssimazione 73

Capitolo 9 - Equazioni differenziali: collegare un’evoluzione al suo tasso di variazione 82

Capitolo 10 - Calcolo combinatorio, probabilità e distribuzione binomiale 91

Capitolo 11 - Geometria dello spazio: vettori, piani e distanze 102

Capitolo 12 - Statistica, concentrazione e metodi algoritmici 113

Appendici - Problemi di sintesi, soluzioni commentate e strategie di ripasso 125

Matematica - Definire, dimostrare, calcolare e interpretare

Un percorso al livello della Terminale francese

Questa guida sviluppa i principali strumenti matematici dell’indirizzo di specializzazione in matematica dell’ultimo anno del liceo generale francese, chiamato Terminale, insieme ai concetti dell’anno precedente necessari per comprenderli. Organizza definizioni, dimostrazioni, metodi ed esercizi originali. Il programma istituzionale è un riferimento per l’ambito trattato, non un testo riprodotto né una garanzia di copertura di tutte le modalità di una futura sessione d’esame. Gli approfondimenti sono segnalati quando superano il nucleo del percorso.

L’obiettivo non è accumulare formule, ma riconoscere le condizioni che permettono di utilizzarle. Una derivata calcolata correttamente non risponde da sola a un problema di ottimizzazione. Una distribuzione binomiale non si adatta a ogni ripetizione di estrazioni. Una figura nello spazio non dimostra un’intersezione. Ogni tema collega quindi il significato degli oggetti a un procedimento i cui passaggi possono essere giustificati.

Le situazioni numeriche sono didattiche e immaginarie quando non descrivono semplicemente un oggetto matematico. Non viene garantito alcun rendimento finanziario, risultato medico o comportamento reale di un prodotto. Le applicazioni servono a comprendere un ragionamento e i suoi limiti. Non sostituiscono l’analisi professionale di una decisione delicata.

Come usare i dodici capitoli

Il primo capitolo espone il linguaggio e i ragionamenti matematici. I due successivi sviluppano le successioni e i limiti. Continuità, derivazione e convessità formano poi un insieme coerente di strumenti per lo studio delle funzioni. Il settimo capitolo riunisce esponenziale, logaritmo e trigonometria; l'ottavo tratta gli integrali; il nono le equazioni differenziali. Le probabilità, la geometria dello spazio e la statistica con gli algoritmi completano il percorso.

Per una prima lettura, procedete in quest'ordine e rifate gli esempi semplici. Per il ripasso, scegliete una domanda precisa e ritrovate la proprietà da cui dipende la risposta. Le appendici propongono problemi trasversali che richiedono diversi strumenti. Non si limitano a ripetere i calcoli dei capitoli: mostrano come organizzare una soluzione più lunga e discutere ciò che cambia con le ipotesi.

Lavorate con un foglio o un supporto per gli appunti, anche quando consultate la guida sul telefono. Leggete il problema, nascondete la soluzione e scrivete almeno un tentativo. Un errore spiegato è spesso più istruttivo di una soluzione compresa immediatamente. Annotate il primo passaggio in cui il ragionamento ha smesso di essere giustificato, non soltanto l'ultimo risultato differente.

Scrittura, esattezza e approssimazione

I simboli sono definiti nel contesto. Un'uguaglianza esatta e un'approssimazione numerica non svolgono lo stesso ruolo: conservare una forma come $\ln 2$ o $\sqrt{3}$ può evitare errori di arrotondamento. Un intervallo, una condizione di dominio o un indice iniziale fanno parte del risultato. Eliminare queste informazioni può trasformare una risposta esatta in un'affermazione falsa.

Una dimostrazione stabilisce una proposizione per tutti i valori del dominio dichiarato. Un esempio verifica soltanto un caso; un controesempio basta invece a confutare un’affermazione universale. Una simulazione esplora un modello, ma non sostituisce una dimostrazione. Queste distinzioni attraversano l’intera guida e costituiscono una competenza importante quanto la padronanza tecnica.

Per controllare una soluzione, cercate un metodo indipendente: una derivata per verificare una primitiva, una sostituzione per verificare un’equazione differenziale, una probabilità complementare per controllare un evento o un’equazione di piano per verificare un punto calcolato. Il controllo non deve essere una semplice ripetizione dell’operazione che potrebbe aver prodotto l’errore.

La lunghezza di una spiegazione non garantisce né padronanza né un voto scolastico. Per usare questa guida, scegliete un concetto, ricostruitene il ragionamento senza guardare la soluzione, poi verificate ipotesi e calcoli. L’obiettivo è saper trasferire un metodo a un problema nuovo, non avere semplicemente letto più pagine.

Codex, l’assistente di intelligenza artificiale di OpenAI, ha contribuito alla redazione e alla traduzione italiana di questo testo. Le versioni francese e inglese di riferimento sono state sottoposte a rilettura indipendente. Il contributo non implica un’approvazione di OpenAI, una certificazione istituzionale o una garanzia di risultato scolastico.

Capitolo 1 - Dal problema alla dimostrazione: domini, implicazioni e controesempi

Obiettivi: individuare il tipo di risultato cercato, distinguere una verifica da una dimostrazione ed esplicitare domini e trasformazioni. Il modulo iniziale è incluso qui una sola volta come fondamento; i capitoli successivi sviluppano più approfonditamente ciascuna famiglia di problemi.

Prospettiva storica - Hilbert: rendere visibili le ipotesi

Nel 1899, David Hilbert pubblica Grundlagen der Geometrie, una presentazione assiomatica della geometria. Questa prospettiva storica ricorda che una figura familiare non elimina la necessità di dichiarare quali relazioni siano assunte e quali proprietà siano dimostrate. In questo capitolo, la stessa esigenza si applica al dominio di una variabile e alle condizioni di una trasformazione: una conclusione vale soltanto sotto le ipotesi effettivamente utilizzate. Si tratta di un confronto didattico; la guida non presenta il sistema di assiomi di Hilbert e non pretende di risolvere le questioni relative ai fondamenti.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/

1. Sapere che cosa si vuole stabilire

Un calcolo può produrre un valore, una congettura o una dimostrazione: questi risultati non hanno lo stesso stato. Verificare una relazione per cinque valori suggerisce che possa essere vera; non la dimostra per tutti i numeri. Una dimostrazione spiega perché la conclusione discenda dalle ipotesi nell'intero dominio dichiarato. Un solo controesempio basta, invece, a confutare un'affermazione universale.

Consideriamo «per ogni reale x, $x^2 > x$». I valori 2 e 3 soddisfano la disuguaglianza, ma $x = 0$ la confuta già. Il reale 1/2 dà persino $x^2 < x$. Il problema non deriva dall'aver fatto troppo pochi calcoli: la proposizione era troppo ampia. Per trovare un'affermazione corretta, scomponiamo $x^2 - x = x(x - 1)$, poi studiamone il segno sugli intervalli pertinenti. Si ottiene $x^2 > x$ quando $x < 0$ oppure $x > 1$.

Prima di risolvere un problema, precisate il dominio, i dati e il tipo di risposta richiesta: un valore esatto, un'approssimazione, esistenza, unicità o una proprietà valida per ogni indice. Queste distinzioni guidano il metodo e impediscono di presentare un'approssimazione grafica come una dimostrazione.

2. Implicazione, equivalenza e domini di definizione

Due proposizioni sono equivalenti quando ciascuna implica l'altra. Elevare al quadrato un'uguaglianza può conservare un'implicazione senza conservare l'equivalenza. L'uguaglianza $x = 2$ implica $x^2 = 4$; l'equazione $x^2 = 4$ ha anche la soluzione $x = -2$. In una successione di passaggi, dichiarare le condizioni che rendono reversibili le trasformazioni permette di individuare le soluzioni aggiuntive.

Dividere per un'espressione richiede che essa sia diversa da zero. Per risolvere $x(x - 2) = 0$, dividere subito per x elimina la soluzione

$x = 0$. La legge di annullamento del prodotto dà direttamente $x = 0$ oppure $x = 2$. Analogamente, un'espressione contenente $\ln(x)$ richiede $x > 0$. Il dominio non è una precauzione aggiunta dopo il calcolo: fa parte del problema fin dall'inizio.

Un'abitudine utile consiste nel dichiarare le restrizioni all'inizio, poi verificare le soluzioni ottenute nell'equazione originaria. Questo controllo finale non sostituisce la dimostrazione che tutte le soluzioni siano state trovate, ma elimina quelle introdotte da una trasformazione irreversibile.

3. Una successione: descrivere un'evoluzione discreta

Una successione assegna un valore u_n a ogni indice intero del suo dominio. Un'espressione esplicita dà u_n direttamente in funzione di n; una relazione di ricorrenza calcola un valore a partire dai valori precedenti. Le due descrizioni possono rappresentare la stessa evoluzione, ma rendono più facile rispondere a domande differenti.

Prendiamo $u_0 = 1$ e $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 2$. I primi termini sono 1; 2,5; 3,25; 3,625. Suggeriscono una crescita verso 4 senza dimostrarla. Cerchiamo un valore fisso L che soddisfi $L = 0{,}5\, L + 2$: si ottiene $L = 4$. Poniamo $v_n = u_n - 4$. Allora $v_{n+1} = 0{,}5\, v_n$, quindi $v_n = -3 \times (0{,}5)^n$ e $u_n = 4 - 3 \times (0{,}5)^n$.

Questa espressione giustifica le osservazioni. Poiché $(0{,}5)^n$ è strettamente positivo, $u_n < 4$. Inoltre, $u_{n+1} - u_n = 1{,}5 \times (0{,}5)^n > 0$: la successione è crescente. Infine, $(0{,}5)^n$ tende a zero, quindi u_n tende a 4. Il calcolo di valori è diventato una dimostrazione perché è stata individuata una struttura.

4. Induzione: non dimenticare il primo anello

Una dimostrazione per induzione comprende un caso iniziale, un passo induttivo e una conclusione. Per dimostrare $u_n < 4$ nell'esempio precedente, iniziamo da $u_0 = 1 < 4$. Se $u_n < 4$, allora $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2 < 0{,}5 \times 4 + 2 = 4$. La proprietà vale dunque per ogni intero $n \geq 0$.

Qui si utilizza il segno positivo di 0,5: moltiplicare una disuguaglianza per un numero negativo ne invertirebbe il verso. Scrivere soltanto «supponiamo vera la proprietà» e arrivare a un'affermazione dall'aspetto simile non costituisce un passo induttivo. Occorre mostrare esattamente come l'ipotesi relativa a n produca la conclusione relativa a n + 1.

L'induzione non è un ragionamento circolare. Il caso iniziale stabilisce un caso senza assumere la conclusione generale; il passo induttivo descrive una transizione valida a partire da qualunque caso già stabilito. Eliminare uno dei due elementi distrugge l'argomentazione.

5. Derivare per comprendere le variazioni

Il quoziente $[f(x + h) - f(x)] / h$ descrive un tasso medio di variazione quando h è diverso da zero. Se il suo limite esiste quando h tende a zero, quel limite definisce $f'(x)$. Geometricamente, la derivata fornisce la pendenza della tangente; in un modello di posizione può rappresentare la velocità. La derivata ha le unità di f divise per le unità di x.

Su un intervallo, il segno della derivata informa sulla monotonia sotto le consuete ipotesi di derivabilità. Trovare gli zeri di f' non basta, tuttavia, a determinare un massimo globale. Occorre esaminare il segno, il dominio e, secondo il problema, gli estremi dell'intervallo. Un punto in cui f' si annulla può anche essere un minimo o non corrispondere ad alcun estremo.

Per una funzione composta g(u(x)), la derivata è g'(u(x)) × u'(x). Così, la derivata di e^(−2x) è −2 e^(−2x), non semplicemente e^(−2x). Il fattore associato alla funzione interna è spesso quello dimenticato. Qui aiuta controllare il comportamento atteso: un'esponenziale decrescente deve avere una derivata negativa.

6. Ottimizzare sotto un vincolo

Un rettangolo ha un perimetro di 20 m. Se i lati sono x e y, allora x + y = 10. La sua area non è quindi una funzione di due variabili indipendenti: A(x) = x(10 − x), con 0 ≤ x ≤ 10 se nello studio matematico si includono i casi limite degeneri.

La derivata A'(x) = 10 − 2x è positiva prima di 5 e negativa dopo 5. L'area massima è A(5) = 25 m²; il rettangolo corrispondente è un quadrato. Un'altra dimostrazione deriva da A(x) = 25 − (x − 5)². I due approcci sono compatibili: uno usa la monotonia, l'altro una proprietà algebrica. Confrontare metodi adatti arricchisce il ragionamento senza creare un dissenso artificiale.

La risposta deve ancora essere interpretata. Se un vincolo aggiuntivo imponesse una larghezza inferiore a 3 m, il massimo precedente non sarebbe più ammissibile. Risolvere il problema ideale e poi dimenticare i vincoli effettivi significherebbe rispondere a un'altra domanda.

7. Esistenza e unicità sono risultati distinti

Consideriamo f(x) = x³ + x − 1. È continua su [0; 1], con f(0) = −1 e f(1) = 1. Il teorema dei valori intermedi garantisce quindi almeno una soluzione di f(x) = 0 in questo intervallo. Poiché f'(x) = 3x² + 1 > 0, la funzione è strettamente crescente: la soluzione è unica.

La continuità stabilisce l'esistenza; la monotonia stretta stabilisce l'unicità. Le proprietà non devono essere confuse. Una funzione continua può assumere più volte lo stesso valore. Una funzione

strettamente crescente può non raggiungere il valore richiesto su un dato intervallo.

Il metodo di bisezione fornisce poi una delimitazione. Qui f(0,5) = −0,375 e f(0,75) = 0,171875: la soluzione si trova in [0,5; 0,75]. Ogni passo conserva un cambiamento di segno e dimezza la lunghezza dell'intervallo. Gli estremi accompagnati dal loro metodo sono più informativi di un lungo valore decimale non giustificato.

8. Logaritmi e interpretazione di una soglia

L'esponenziale e il logaritmo naturale sono inversi sui domini appropriati. Per risolvere e^(−2t) = 0,1, prendiamo il logaritmo di quantità positive: −2t = ln(0,1) = −ln(10), da cui t = ln(10)/2, circa 1,1513 nell'unità di tempo del modello.

La soluzione di un'equazione non coincide sempre con la soglia di una disuguaglianza. Se si richiede e^(−2t) ≤ 0,1 per t ≥ 0, la risposta è t ≥ ln(10)/2, perché questa esponenziale è decrescente. L'espressione ln(a + b) = ln(a) + ln(b) è generalmente falsa: il logaritmo trasforma un prodotto di fattori positivi in una somma, non una somma in una somma.

Per la nostra successione, richiedere 4 − u_n < 0,01 dà 3 × (0,5)^n < 0,01. Il primo indice ammissibile è n = 9: lo scarto a n = 8 è 0,01171875 e a n = 9 è 0,005859375. Poiché l'indice è intero, un valore reale ottenuto mediante i logaritmi deve ancora essere interpretato correttamente.

9. Esercizi con soluzioni

A - Controesempio. «Se a² = b², allora a = b.» **Soluzione:** a = 1 e b = −1 confutano l'affermazione. La conclusione corretta sui reali è a = b oppure a = −b, ottenuta scomponendo a² − b².

B - Monotonia. Studiate $f(x) = x^3$ sui reali. **Soluzione:** $f'(x) = 3x^2 \geq 0$; la funzione è strettamente crescente, nonostante $f'(0) = 0$. Si possono anche confrontare direttamente due cubi. Una derivata che si annulla in un solo punto non implica un estremo.

C - Primitiva. Trovate una primitiva di $2x$ sui reali, poi l'integrale di $2x$ fra 0 e 3. **Soluzione:** $F(x) = x^2$ è adatta perché $F' = 2x$. L'integrale è $F(3) - F(0) = 9$. Aggiungere una costante a F non modifica questa differenza.

D - Definizione. Calcolate la mediana di 2; 3; 8; 11. **Soluzione:** la lista è ordinata e contiene quattro valori; la mediana usuale è la media dei due valori centrali, $(3 + 8)/2 = 5{,}5$. La media aritmetica della serie è 6: gli indicatori non rispondono esattamente alla stessa domanda.

10. Ripassare un metodo, non soltanto un risultato

Per ogni esercizio, chiedete: quale dominio, quale proprietà, quali ipotesi, quale trasformazione e quale conclusione? Ripetere il calcolo con valori diversi verifica che il metodo non dipenda da un esempio memorizzato. Spiegare ad alta voce perché un passaggio sia consentito rivela spesso una comprensione ancora fragile.

Una soluzione leggibile distingue i dati, il ragionamento e l'interpretazione. Connettivi come «perché», «dunque» e «viceversa» devono corrispondere a un legame logico reale. Conservate un quaderno degli errori con una correzione e un controesempio; una semplice lista di formule non mostra quando utilizzarle.

11. Quantificatori: dire esattamente che cosa afferma la dimostrazione

«Per ogni x esiste y» ed «esiste y tale che per ogni x» non dicono la stessa cosa. Se ogni studente può trovare un libro adatto a lui, il libro può variare da uno studente all'altro. Ciò non stabilisce l'esistenza di uno stesso libro adatto a tutti. In matematica, la distinzione compare nelle proprietà delle funzioni: per ogni reale x esiste un reale y tale che $y > x$; non esiste un reale y maggiore di ogni reale x. La prima affermazione si dimostra scegliendo $y = x + 1$; la seconda si confuta prendendo $x = y + 1$, qualunque sia il candidato y proposto.

Per negare «tutti i termini sono positivi», basta affermare che almeno un termine non è positivo. La negazione di $u_n > 0$ è $u_n \leq 0$, non $u_n < 0$. L'uguaglianza può essere il controesempio mancante. Viceversa, negare «esiste una soluzione» significa che nessun valore del dominio soddisfa l'equazione. Questa affermazione richiede una dimostrazione che copra l'intero dominio; non trovare una soluzione sulla calcolatrice non costituisce tale dimostrazione.

Nella redazione, introducete l'oggetto arbitrario: «sia x un reale strettamente positivo». Questa scelta non impone alcun valore particolare e permette di dimostrare una proprietà generale nel dominio. Quando una costante dipende da x, dichiaratelo. I quantificatori impediscono che una costruzione adatta a un caso diventi una promessa uniforme. Questa precisione è utile per le soglie di convergenza, le probabilità e i problemi di ottimizzazione.

12. Scegliere fra dimostrazione diretta, contrapposizione e assurdo

Una dimostrazione diretta parte dalle ipotesi e ottiene la conclusione. Per dimostrare che $x > 1$ implica $x^2 > x$, scriviamo $x^2 - x = x(x - 1)$, poi osserviamo che entrambi i fattori sono positivi. La contrapposta esprime la stessa relazione logica in un'altra direzione: se $x^2 \leq x$, allora $x \leq 1$. Occorre conservare la negazione esatta e il dominio. L'implicazione inversa, «se $x^2 > x$, allora $x > 1$», è falsa, perché $x = -1$ soddisfa l'ipotesi ma non la conclusione.

Una dimostrazione per assurdo suppone temporaneamente la negazione della conclusione e cerca un'incompatibilità con le ipotesi o con una proprietà stabilita. Arrivare a un'affermazione sorprendente non basta. Per esempio, per mostrare che non esiste un numero naturale massimo, supponiamo che esista un tale numero N. L'intero $N + 1$ è ancora un numero naturale ed è maggiore di N: questa è la contraddizione richiesta. Il ragionamento spiega anche il risultato, perché costruisce un candidato maggiore di qualsiasi massimo proposto.

Una soluzione può usare diversi metodi, ma ogni transizione deve essere identificabile. Iniziare con «supponiamo vera la proprietà» senza precisare se si stia preparando un'induzione, una contrapposizione o un ragionamento per assurdo lascia al lettore il compito di indovinare il ruolo dell'ipotesi. Una dimostrazione riuscita espone quel ruolo invece di presentare una successione di calcoli già familiari all'autore.

Esercizio aggiuntivo. Per i reali a e b, considerate l'affermazione: «se $ab = 0$, allora $a = 0$». Trovate una correzione precisa. **Soluzione:** $a = 2$ e $b = 0$ forniscono un controesempio. La conclusione valida è $a = 0$ oppure $b = 0$. Se alle ipotesi si aggiunge $b \neq 0$, la conclusione $a = 0$ diventa corretta per divisione. La proprietà non era del tutto irragionevole; aveva perso un'ipotesi o

un’alternativa essenziale. Imparare a correggere un’affermazione sviluppa la comprensione più del semplice classificare una frase come vera o falsa.

Capitolo 2 - Successioni e induzione: comprendere l’evoluzione discreta

Prospettiva storica - Fibonacci: una ricorrenza nasce dalle ipotesi

Leonardo Pisano, detto Fibonacci, scrive il Liber abaci nel 1202. Il testo contiene un problema immaginario di riproduzione dei conigli associato alla successione che oggi porta il suo nome. L’interesse per questo capitolo consiste nel passaggio dalle ipotesi a una regola di ricorrenza, seguito dall’esame di ciò che quella regola permette di concludere. Un modello del genere non diventa una previsione biologica soltanto perché i primi termini sono facili da calcolare. Questo esempio storico non significa né che Fibonacci abbia inventato ogni successione di questa forma né che ogni fenomeno naturale segua tale ricorrenza.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/

1. Individuare l’indice e la regola di evoluzione

Una successione è una funzione definita su un insieme di interi, spesso i naturali. L’indice n non è il valore u_n: identifica una tappa. Quando u_n descrive una quantità dopo n operazioni, u_0 ne descrive lo stato prima della prima operazione. Un errore nel punto di partenza sposta l’intera interpretazione senza rendere necessariamente i calcoli visibilmente errati. Iniziate con una frase che spieghi l’indice e la condizione iniziale.

Una definizione esplicita, come u_n = 3n + 2, consente di calcolare direttamente il termine di indice 100. Una definizione per ricorrenza, come u_(n+1) = 0,8u_n + 5, richiede un valore iniziale e costruisce l’evoluzione passo dopo passo. La seconda

espressione non permette di sostituire u_n con n: u_(n+1) = 0,8n + 5 definirebbe un’altra successione. La regola agisce sul valore corrente, non direttamente sul numero della tappa.

Una tabella dei primi termini e un grafico possono suggerire un andamento. Aiutano a individuare un possibile segno o un limite superiore o inferiore, ma non costituiscono una dimostrazione per un’infinità di termini. Gli arrotondamenti della calcolatrice possono anche nascondere una divergenza lenta o un’oscillazione molto piccola. Le osservazioni orientano quindi la ricerca; gli argomenti algebrici e i teoremi stabiliscono il risultato.

2. Successioni aritmetiche: aggiungere una costante

Una successione aritmetica soddisfa u_(n+1) = u_n + r, dove r è una costante chiamata ragione aritmetica. Con primo termine u_0, la forma esplicita è u_n = u_0 + nr. Si può dimostrare per induzione: il caso n = 0 è immediato; se la formula vale all’indice n, allora u_(n+1) = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r. La proprietà viene così trasmessa al termine successivo.

Il segno di r determina il verso dell’evoluzione: una ragione positiva produce una crescita stretta; una negativa, una decrescita stretta; una nulla, una successione costante. Un aumento costante di 5 unità differisce da un aumento del 5%. Nel primo caso si aggiunge 5; nel secondo si moltiplica per 1,05. Questa distinzione va compresa prima di cercare una formula, soprattutto quando il linguaggio quotidiano usa «aumento regolare» per entrambe le situazioni.

La somma di N termini consecutivi di una successione aritmetica è N volte la media del primo e dell’ultimo termine. Da u_0 a u_n inclusi ci sono n + 1 termini; la loro somma è (n + 1)(u_0 + u_n)/2. Una dimostrazione scrive la somma nell’ordine diretto e nell’ordine inverso: ogni coppia di termini corrispondenti ha la stessa somma

u_0 + u_n. Questa dimostrazione spiega il fattore 1/2 ed evita di confondere l’ultimo indice con il numero di termini.

Esempio immaginario: una serie di lunghezze è 4; 7; 10; …; 34. La ragione è 3. Risolvere 4 + 3n = 34 dà n = 10, quindi ci sono undici termini, non dieci. La somma è 11×(4 + 34)/2 = 209. Verificare casi piccoli fornisce un controllo utile: per n = 0, la formula deve dare u_0, non zero.

3. Successioni geometriche: moltiplicare per una costante

Una successione geometrica soddisfa u_(n+1) = qu_n. Se parte dall’indice zero e q ≠ 0, la forma esplicita è u_n = u_0q^n per n ≥ 0. Quando q = 0, si conserva il termine iniziale dato u_0, poi u_n = 0 per ogni n ≥ 1; trattare separatamente questo caso evita di introdurre 0^0. La ragione geometrica q può essere positiva, nulla o negativa; il suo valore e il segno di u_0 vanno esaminati prima di dichiarare come vari la successione. Per u_0 > 0 e q > 1, la successione cresce. Per u_0 > 0 e 0 < q < 1, decresce verso zero. Una ragione negativa produce un’alternanza di segni quando u_0 è diverso da zero.

Una diminuzione del 20% a ogni tappa corrisponde a q = 0,80. Dopo due tappe, il valore è stato moltiplicato per $0{,}80^2 = 0{,}64$: la diminuzione totale è del 36%, non del 40%. Le percentuali successive si applicano a basi differenti. Una quantità iniziale immaginaria di 60 unità diventa 48, poi 38,4. È un esercizio di calcolo, non una previsione di evoluzione economica, biologica o medica.

Per q diverso da 1, la somma 1 + q + … + q^n è uguale a (1 − q^(n+1))/(1 − q). Per stabilirlo, moltiplichiamo la somma S per q, poi sottraiamo: S − qS = 1 − q^(n+1). La divisione è valida perché q ≠ 1. Per q = 1, la somma è semplicemente n + 1. Separare

questo caso non è una formalità: la formula precedente avrebbe un denominatore nullo.

La somma dei termini da u_0 a u_n è dunque u_0(1 − q^(n+1))/(1 − q). Per u_0 = 2 e q = 1/2, i primi quattro termini danno 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = 3,75. La formula dà 2(1 − (1/2)^4)/(1/2) = 3,75. Questo controllo conferma sia il numero di termini sia l’esponente n + 1.

4. Induzione: formulare una proprietà che si possa trasmettere

Una dimostrazione per induzione riguarda una proposizione P(n) per ogni intero di un dominio. Comprende un caso iniziale, un passo induttivo e una conclusione. Nel passo induttivo si fissa un intero arbitrario n del dominio, si assume P(n) e si dimostra P(n + 1). Non si assume contemporaneamente la conclusione a ogni indice. L’ipotesi svolge un ruolo locale e condizionale.

La forma di P(n) richiede talvolta un rafforzamento. Per dimostrare soltanto u_n < 5, può essere più utile dimostrare 0 ≤ u_n < 5, perché una limitazione inferiore permette poi di estrarre una radice quadrata o conservare un segno. Rafforzare un’ipotesi induttiva non significa aggiungere arbitrariamente ciò che rende comodo il calcolo: ogni componente va dimostrata sia all’inizio sia nel passaggio all’indice successivo.

Ecco una dimostrazione originale di un’identità: per ogni n ≥ 0, 1 + 3 + … + (2n + 1) = (n + 1)². All’indice zero, entrambi i membri sono uguali a 1. Supponiamo valida l’identità all’indice n. All’indice n + 1 si aggiunge il termine 2n + 3: (n + 1)² + 2n + 3 = n² + 4n + 4 = (n + 2)². L’uguaglianza si trasmette. Un disegno di quadrati annidati può illustrare questa crescita, ma la dimostrazione algebrica copre ogni indice.

Gli errori frequenti comprendono un caso iniziale all’indice sbagliato, un calcolo che non usa mai l’ipotesi e una conclusione senza dominio dichiarato. Una proprietà come 2^n ≥ n può avere una dimostrazione breve; ciò non giustifica l’omissione delle tappe. La redazione può essere concisa pur restando completa: individuare il caso iniziale e mostrare esplicitamente il passaggio è spesso sufficiente.

5. Studiare le variazioni senza un metodo automatico

Per confrontare due termini consecutivi, si può studiare u_(n+1) − u_n. Una differenza positiva a ogni indice stabilisce la crescita. Se tutti i termini sono strettamente positivi, si può anche studiare il rapporto u_(n+1)/u_n e confrontarlo con 1. La positività è essenziale per questa seconda strategia; un rapporto negativo o un termine nullo richiedono un’altra analisi.

Una funzione associata può essere utile. Per u_n = f(n), se f è crescente su un intervallo che contiene gli indici considerati, la successione è crescente. Il viceversa non è una regola generale: una funzione può variare fra gli interi senza impedire che i soli valori interi aumentino. Non sostituite quindi una successione con una funzione dichiarando un’equivalenza senza giustificazione.

Consideriamo u_n = n/(n + 1), per n ≥ 0. La differenza è (n + 1)/(n + 2) − n/(n + 1) = 1/[(n + 1)(n + 2)] > 0. La successione cresce e resta strettamente inferiore a 1. L’espressione u_n = 1 − 1/(n + 1) fornisce un secondo approccio immediato. I due metodi rivelano strutture diverse: un confronto locale fra termini vicini e una distanza esplicita dal limite.

6. Ricorrenze affini: spostare l’origine dei valori

Per u_(n+1) = au_n + b, con a ≠ 1, il valore fisso L risolve L = aL + b, quindi L = b/(1 − a). Porre v_n = u_n − L trasforma la relazione in v_(n+1) = av_n. Si ottiene così u_n = L + (u_0 − L)a^n. La nuova variabile misura la distanza dal punto fisso; rende visibile la struttura geometrica.

Prendiamo u_0 = 10 e u_(n+1) = 0,75u_n + 3. Il punto fisso è 12 e u_n = 12 − 2(0,75)^n. La successione è crescente, resta inferiore a 12 e converge a 12. Se scegliessimo u_0 = 14 con la stessa regola, otterremmo 12 + 2(0,75)^n: una decrescita verso lo stesso limite. La sola regola non determina quindi sempre il verso delle variazioni; lo determina anche la condizione iniziale.

Con a = −1/2 e L = 4, lo scarto alterna il segno e il suo valore assoluto diminuisce. Una successione può convergere senza essere monotona. Con a = 2, uno scarto iniziale non nullo raddoppia a ogni tappa e si allontana dal punto fisso. Tuttavia, se u_0 = L, la successione è costante. Dire «a > 1 implica sempre divergenza» trascurerebbe questo caso eccezionale. Il capitolo sui limiti preciserà queste distinzioni.

7. Una successione definita con una radice quadrata

Studiamo u_0 = 0 e u_(n+1) = sqrt(u_n + 2). Dobbiamo prima assicurarci che ogni termine sia definito. Dimostriamo per induzione che 0 ≤ u_n ≤ 2. È vero inizialmente. Se è vero all’indice n, allora 2 ≤ u_n + 2 ≤ 4, quindi sqrt(2) ≤ u_(n+1) ≤ 2. L’espressione resta definita e il termine successivo soddisfa la limitazione dichiarata.

La funzione f(x) = sqrt(x + 2) è crescente su [0; 2]. Poiché u_1 = sqrt(2) > u_0, l’induzione dà u_(n+1) ≥ u_n: se u_n ≥ u_(n−1), applicare f conserva la disuguaglianza. Si possono anche confrontare f(x) e x per 0 ≤ x ≤ 2. Entrambe le quantità sono non

negative; f(x) ≥ x è allora equivalente a x + 2 ≥ x², oppure (x − 2)(x + 1) ≤ 0, che vale su questo intervallo.

La successione è crescente e limitata superiormente: il teorema di convergenza delle successioni monotone assicura che possieda un limite finito. Grazie alla continuità della radice quadrata, questo limite L soddisfa L = sqrt(L + 2). Poiché L appartiene a [0; 2], possiamo elevare entrambi i membri al quadrato e ottenere L² − L − 2 = 0. I candidati sono 2 e −1; soltanto 2 appartiene al dominio. La sola equazione del punto fisso non bastava a dimostrare la convergenza, e il dominio elimina una soluzione algebrica estranea.

8. Soglie, interi e algoritmi

Per la quantità immaginaria u_n = 60(0,80)^n, cerchiamo il primo indice in cui u_n < 5. Si ottiene (0,80)^n < 1/12. Il logaritmo è crescente sui numeri positivi, quindi n ln(0,80) < ln(1/12). Dividere per ln(0,80), che è negativo, inverte la disuguaglianza: n > ln(1/12)/ln(0,80), circa 11,136. Il primo intero ammissibile è 12.

Il controllo finale stabilisce la minimalità: u_11 vale circa 5,154, quindi non soddisfa la soglia stretta; u_12 vale circa 4,123, quindi la soddisfa. Arrotondare n all’intero più vicino sarebbe qui il metodo sbagliato. La domanda richiede un intero che soddisfi una disuguaglianza, non un’approssimazione simmetrica di un numero reale.

Un algoritmo può procedere senza logaritmo: inizializzare n = 0 e u = 60, poi, finché u ≥ 5, sostituire u con 0,80u e n con n + 1. Lo stato u = 60(0,80)^n è un invariante del ciclo. La convergenza a zero assicura qui che la soglia venga infine raggiunta. Per un’altra successione, un ciclo simile potrebbe non fermarsi mai; va quindi discussa la terminazione, non soltanto la sintassi.

9. Esercizi con soluzioni

A - Indice spostato. Una successione aritmetica inizia con u_1 = 7 e ha ragione 4. **Soluzione:** u_n = 7 + 4(n − 1), per n ≥ 1. Il termine u_6 è 27. Scrivere 7 + 4n conterebbe un aumento in più. La somma dei primi sei termini è 6(7 + 27)/2 = 102.

B - Ragione. La successione u_n = (−1/2)^n è decrescente? **Soluzione:** no; i suoi termini si alternano attorno a zero. Il valore assoluto (1/2)^n decresce e tende a zero. Il rapporto fra termini consecutivi è −1/2 e non permette di usare il criterio basato sul confronto con 1 per termini positivi.

C - Formula affine. u_0 = 3 e u_(n+1) = 2u_n − 1. **Soluzione:** L = 1, poi u_n = 1 + 2×2^n. Il primo termine è effettivamente 3; il successivo è 5. La successione diverge a +∞. Una soluzione di L = 2L − 1 non è automaticamente il limite di ogni successione definita da questa regola.

D - Una limitazione insufficiente. «Una successione limitata superiormente converge.» **Soluzione:** (−1)^n è limitata superiormente ma non converge. Le sue sottosuccessioni di indice pari e dispari hanno limiti differenti, il che rende impossibile un limite comune. Un’ipotesi sufficiente sarebbe che la successione sia crescente e limitata superiormente: il teorema di convergenza delle successioni monotone assicura allora un limite finito. Una successione soltanto decrescente e limitata superiormente potrebbe tendere a −∞, come u_n = −n; la monotonia senza il suo verso e la limitazione appropriata è quindi insufficiente.

10. Ripasso e riferimenti

Occorre saper ottenere una formula esplicita da una relazione affine, dimostrare una limitazione per induzione e giustificare il primo indice che raggiunge una soglia. Per ogni risultato, distinguete osservazione, dimostrazione del verso delle variazioni, dimostrazione della convergenza e identificazione del limite. Queste tappe rispondono a domande differenti e possono richiedere argomenti diversi.

Il percorso segue il programma ufficiale pubblicato per la specializzazione in matematica della Terminale francese: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm, allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultato l’11 ottobre 2026. Tutti gli esempi, le dimostrazioni sviluppate e gli esercizi sono testi originali LFDP. Non vengono presentati dati reali, previsioni di rendimento o riproduzioni di prove d’esame.

Capitolo 3 - Limiti: stabilire un comportamento senza confondere calcolo e dimostrazione

Prospettiva storica - Cauchy: verificare le condizioni dell'analisi

Il Cours d'analyse di Cauchy viene pubblicato nel 1821 per l'insegnamento all'École Polytechnique. Si inserisce nello sforzo storico di formulare rigorosamente i risultati dell'analisi. Il collegamento utile con questo capitolo è l'attenzione alle condizioni: riconoscere un'espressione o osservare un andamento non basta a giustificare un'operazione sui limiti. Gli strumenti moderni qui presentati devono essere letti insieme ai loro domini e alle loro ipotesi. Questa prospettiva individua una tappa storica; non equipara ogni formulazione usata da Cauchy alle definizioni e ai teoremi odierni.

Fonte storica: Bibliothèque nationale de France - scheda bibliografica : https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073247 ; University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/

1. Che cosa significa avvicinarsi a un valore

Una successione converge a L quando i suoi termini finiscono per restare vicini a L quanto vogliamo. Più precisamente, per ogni precisione $\varepsilon > 0$ esiste un indice N tale che, per ogni $n \geq N$, $|u_n - L| < \varepsilon$. L'indice può dipendere dalla precisione richiesta. Non basta che un termine sia molto vicino a L: da un certo indice in poi tutti i termini successivi devono soddisfare la condizione.

Questa formulazione spiega perché un limite non sia necessariamente un valore raggiunto. Per $u_n = 1 - 1/(n + 1)$, nessun termine è uguale a 1, ma la distanza è $1/(n + 1)$ e diventa

arbitrariamente piccola. Viceversa, una successione può assumere esattamente lo stesso valore a un’infinità di indici senza convergere a esso: (−1)^n è uguale a 1 a ogni indice pari e a −1 agli indici dispari. La frequenza di un valore non sostituisce una proprietà relativa a tutti gli indici sufficientemente grandi.

Una successione non può avere due limiti finiti differenti. Per comprenderne l’idea, se L e M sono distinti, scegliamo intorni con raggi inferiori a un terzo di |L − M|. Sono disgiunti. I termini non possono trovarsi tutti in entrambi gli intorni a partire dallo stesso indice sufficientemente grande. Questa unicità permette di parlare di «il limite», ma soltanto dopo averne stabilito l’esistenza.

2. Una prima dimostrazione dalla definizione

Per u_n = 1/(n + 1), dimostriamo la convergenza a zero. La distanza da zero è esattamente 1/(n + 1). Per una precisione ε > 0, scegliere un intero N tale che N + 1 > 1/ε assicura che, per ogni n ≥ N, 1/(n + 1) < ε. La dimostrazione soddisfa direttamente la definizione e mostra come costruire un indice adatto. Non si fonda su una figura che sembra avvicinarsi all’asse.

Per u_n = 3 + 2/(n + 1), il limite è 3 perché |u_n − 3| = 2/(n + 1). È adatto un indice che soddisfi N + 1 > 2/ε. Il coefficiente modifica la velocità con cui si raggiunge una precisione, non il limite. Due successioni possono avere lo stesso limite e distanze molto diverse da esso a ogni tappa; non confondete la destinazione con la velocità di convergenza.

Gli esercizi di Terminale non richiedono sempre questa presentazione formale. Comprendere i quantificatori aiuta tuttavia a valutare un ragionamento. «Per ε = 0,01, i termini sono vicini» stabilisce al massimo una precisione particolare. La convergenza riguarda ogni precisione positiva, comprese quelle molto più esigenti. Anche «esiste un indice in cui la distanza è piccola»

dimentica che la proprietà deve continuare a valere oltre quell’indice.

3. Divergenza all’infinito e assenza di limite

Una successione tende a $+\infty$ quando, per ogni soglia reale A, tutti i suoi termini superano A a partire da un certo indice. L’infinito non è un numero uguale all’ultimo termine; generalmente una successione non ha un ultimo termine. Il simbolo descrive un comportamento. La definizione di $-\infty$ è analoga, con termini che finiscono per restare inferiori a ogni soglia.

La successione $2n + 1$ tende a $+\infty$: basta scegliere N abbastanza grande perché $2N + 1 > A$. La successione $-n^2$ tende a $-\infty$. Invece, $(-1)^n$ non tende né a $+\infty$ né a $-\infty$: i termini alternano grandi valori positivi e negativi. Non possiede neppure un limite finito. La parola «divergente» può dunque descrivere diverse situazioni che una conclusione precisa deve distinguere.

Una successione non limitata non tende necessariamente a $+\infty$. Occorre esaminare tutti gli indici sufficientemente grandi, non soltanto alcuni valori molto grandi. Analogamente, una successione limitata non converge necessariamente: alternare -1 e 1 basta a mostrarlo. Questi controesempi sono utili in un quaderno di ripasso perché impediscono di utilizzare un teorema privato delle sue ipotesi.

4. Operazioni sui limiti e forme indeterminate

Se u_n e v_n convergono a limiti finiti L e M, la loro somma converge a $L + M$ e il loro prodotto a LM. Se $M \neq 0$ e il quoziente è definito a partire da un certo indice, u_n/v_n converge a L/M. La condizione sul denominatore è essenziale. Le regole usuali semplificano uno studio quando si applicano; non costituiscono un’aritmetica senza restrizioni sui simboli infiniti.

Le forme $\infty - \infty$, $0\times\infty$, ∞/∞ e $0/0$ sono indeterminate: i soli limiti separati non permettono di concludere. Per esempio, n^2/n tende a $+\infty$, n/n tende a 1 e n/n^2 tende a zero; tutti e tre i quozienti hanno la stessa forma ∞/∞. Analogamente, $(n + 1) - n$ è uguale a 1, mentre $n^2 - n$ tende a $+\infty$. La mancanza di una conclusione automatica non significa che non esista un metodo.

Occorre trasformare l'espressione, mettere in evidenza un termine dominante, scomporre o razionalizzare. Le trasformazioni devono rispettare i domini. Le regole di calcolo possono poi essere applicate a un'espressione più adatta. Cercare subito un valore numerico molto grande può suggerire una risposta, ma non sostituisce il ragionamento e può persino nascondere un errore di arrotondamento.

5. Termini dominanti in un quoziente

Per $u_n = (3n^2 - 2n + 5)/(2n^2 + n + 1)$, dividiamo numeratore e denominatore per n^2 per $n \geq 1$. Si ottiene $[3 - 2/n + 5/n^2]/[2 + 1/n + 1/n^2]$. Ogni termine contenente $1/n$ o $1/n^2$ tende a zero; il denominatore tende a 2, che è diverso da zero. Il limite è quindi 3/2. L'argomento non elimina termini perché sembrano piccoli: stabilisce precisamente che tendono a zero nell'espressione normalizzata.

Se il grado del numeratore supera quello del denominatore, il quoziente può divergere, con un segno determinato dai termini dominanti. Se è inferiore, il quoziente può tendere a zero. Per $(-2n^3 + n)/(n^2 + 4)$, dividere per n^2 dà $(-2n + 1/n)/(1 + 4/n^2)$, da cui la divergenza a $-\infty$. Leggere il segno è essenziale; dire soltanto «grado maggiore, quindi infinito» non basta.

Le stesse trasformazioni si applicano alle funzioni quando x tende a $+\infty$ o a $-\infty$. Per $x \to -\infty$, il segno delle potenze dispari cambia. Una formula studiata soltanto agli indici naturali non va estesa ai reali

negativi senza esame, soprattutto se contiene una radice, un logaritmo o una potenza non intera.

6. Razionalizzare una differenza di radici quadrate

Consideriamo u_n = sqrt(n² + n) − n per n ≥ 1. Entrambi i termini tendono a +∞ e la loro differenza è indeterminata. Moltiplicare per l'espressione coniugata dà u_n = n/[sqrt(n² + n) + n]. Dividendo per n, che è positivo, si ottiene 1/[sqrt(1 + 1/n) + 1]. Il limite è 1/2. La razionalizzazione trasforma una sottrazione difficile in un quoziente i cui limiti sono immediatamente utilizzabili.

Il segno di n è stato usato in sqrt(n²) = |n| = n. Per una variabile x che tende a −∞, scrivere sqrt(x²) = x sarebbe sbagliato. Per esempio, sqrt(x² + x) − x si comporta allora come −2x e tende a +∞, nel dominio in cui la radice è definita. Lo stesso aspetto algebrico non impone lo stesso limite alle due estremità dell'asse.

Sulla calcolatrice, un valore grande di n può rendere sqrt(n² + n) e n tanto vicini in termini relativi che l'arrotondamento perde parte della loro differenza. La forma razionalizzata è spesso più stabile numericamente. Questo legame fra ragionamento simbolico e affidabilità numerica mostra che la semplificazione non è soltanto una comodità sulla carta: può migliorare la qualità del calcolo effettivo.

7. Confronto e delimitazione

Il teorema dei carabinieri afferma che, se a_n ≤ u_n ≤ b_n a partire da un certo indice e a_n e b_n hanno lo stesso limite finito L, allora u_n converge a L. La condizione «stesso limite» è essenziale. Delimitare una successione fra 0 e 1 non ne dimostra la convergenza; stabilisce soltanto una limitazione.

Per u_n = (−1)^n/(n + 1), si ha −1/(n + 1) ≤ u_n ≤ 1/(n + 1). Entrambi gli estremi tendono a zero, quindi la successione

converge a zero. Non è monotona, ma la sua oscillazione diminuisce. Questo esempio distingue chiaramente convergenza e monotonia. Una limitazione del valore assoluto, $|u_n| \leq 1/(n + 1)$, dà la stessa conclusione in una notazione più compatta.

Per i limiti infiniti, talvolta basta un confronto. Se $u_n \geq v_n$ a partire da un certo indice e v_n tende a $+\infty$, allora anche u_n tende a $+\infty$. Così, $5n + (-1)^n \geq 5n - 1$ mostra la divergenza a $+\infty$ nonostante una piccola oscillazione. Una limitazione superiore tendente a $+\infty$ non permetterebbe la stessa conclusione: resterebbe possibile una successione costante o decrescente.

8. Successioni monotone limitate e punti fissi

Una successione crescente e limitata superiormente converge a un limite finito. Converge anche una successione decrescente e limitata inferiormente. Le limitazioni non forniscono necessariamente il valore di quel limite. Se $u_n \leq 10$, non c'è motivo di concludere che il limite sia 10. Il teorema assicura la convergenza; identificare il limite richiede un argomento aggiuntivo.

Per una relazione $u_{n+1} = f(u_n)$, se la successione converge a L e f è continua in L, allora $L = f(L)$. Questa equazione fornisce candidati. Non dimostra né la convergenza né l'assenza di altri candidati. La successione $u_{n+1} = 2u_n$ con $u_0 = 1$ diverge, anche se l'equazione $L = 2L$ ha la soluzione $L = 0$. L'esistenza di un punto fisso non significa che ogni traiettoria lo raggiunga o vi si avvicini.

Un'altra trappola consiste nello scegliere una limitazione soltanto per semplificare il calcolo. La limitazione va dimostrata a ogni indice. Per una successione crescente, verificare $u_0 < 5$ non assicura che ogni termine resti inferiore a 5. L'induzione o un'espressione esplicita devono stabilire che l'intervallo sia

conservato prima di invocare il teorema di convergenza delle successioni monotone.

9. Limiti di funzioni e limiti unilaterali

Per una funzione, x può avvicinarsi a un valore a senza essere uguale a esso. Il limite di f(x) quando x tende ad a riguarda i valori vicini del dominio. Per $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, definita per $x \neq 1$, la scomposizione dà $f(x) = x + 1$ su quel dominio. Il limite in 1 è 2, anche se f(1) non è definita. Si può costruire un prolungamento continuo assegnando il valore 2 in quel punto; è una nuova definizione, non un valore già presente.

I limiti da sinistra e da destra possono differire. Per $f(x) = 1/(x - 2)$, il denominatore è negativo quando x si avvicina a 2 da valori inferiori e positivo quando vi si avvicina da valori superiori. Il limite sinistro è $-\infty$ e quello destro è $+\infty$. La retta $x = 2$ è un asintoto verticale, ma non esiste un unico limite infinito senza precisare il lato.

Per $f(x) = 2 + 1/x$, il limite a $+\infty$ è 2: $y = 2$ è un asintoto orizzontale in quella direzione. Non è necessario che, per ogni funzione, la curva resti da un solo lato di un asintoto orizzontale. Un asintoto esprime una distanza che tende a zero, non una barriera fisica che la curva non possa mai attraversare.

Un asintoto obliquo può essere individuato mostrando $f(x) - (ax + b) \to 0$. Per $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, la divisione dà $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. L'ultimo termine tende a zero all'infinito; $y = x + 1$ è quindi un asintoto obliquo. La funzione stessa non converge a un numero finito. La distanza da una retta e il valore della funzione sono due oggetti differenti.

10. Esponenziali e confronti fra crescite

Per $0 < q < 1$, q^n tende a zero. Una giustificazione accessibile utilizza $1/q = 1 + h$ con $h > 0$. La disuguaglianza di Bernoulli, $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, dimostrabile per induzione, dà $0 < q^n \leq 1/(1 + nh)$. La limitazione superiore tende a zero. Se $-1 < q < 0$, il valore assoluto è $|q|^n$ e lo stesso argomento di delimitazione assicura ancora la convergenza a zero, nonostante l'alternanza dei segni.

Quando $q > 1$, q^n tende a $+\infty$. Per le funzioni, i consueti risultati di confronto fra crescite affermano in particolare che $\ln(x)/x \to 0$ quando $x \to +\infty$ e che l'esponenziale domina le potenze a $+\infty$. Qui questi risultati sono proprietà del corso da conoscere; non vengono «dimostrati» mediante una tabella di valori. Possono essere usati per stabilire $e^x/x^2 \to +\infty$ oppure $x^2e^{-x} \to 0$, dopo aver esaminato il dominio e riscritto il prodotto come quoziente.

Non è necessario introdurre una regola avanzata di derivazione dei quozienti per il calcolo dei limiti per trattare tutti questi casi. Usare senza giustificazione un risultato non ancora studiato può nascondere le ipotesi e il metodo atteso. Scomposizioni, confronti e proprietà del corso offrono già un'ampia gamma di ragionamenti adatti alla Terminale.

11. Esercizi con soluzioni

A - Quoziente. Trovate il limite di $(4n^2 + 3)/(n^2 - n + 2)$. **Soluzione:** dividere per n^2: $[4 + 3/n^2]/[1 - 1/n + 2/n^2] \to 4$. Il denominatore tende a 1, il che consente la regola dei limiti del quoziente.

B - Alternanza smorzata. $u_n = 7 + (-1)^n/n$ per $n \geq 1$. **Soluzione:** $|u_n - 7| = 1/n \to 0$, quindi $u_n \to 7$. La successione non è monotona; ciò non impedisce la convergenza.

C - Coniugata. v_n = sqrt(n² + 4n) − n. **Soluzione:** v_n = 4/[sqrt(1 + 4/n) + 1], quindi il limite è 2. Il fattore 4 non viene eliminato: resta al numeratore dopo la normalizzazione.

D - Limite e valore. f(x) = x + 2 per x ≠ 0 e f(0) = 10. **Soluzione:** il limite in zero è 2, ma il valore è 10. La funzione non è continua in zero. I valori vicini determinano il limite; il valore scelto nel punto determina anche la continuità.

E - Punto fisso. u_0 = 2 e u_(n+1) = −u_n. **Soluzione:** i termini alternano 2 e −2. L'equazione L = −L dà 0, ma la successione non converge. Non possiamo passare al limite in una relazione prima di aver stabilito, o assunto esplicitamente, che quel limite esista.

12. Ripasso e riferimenti

Per ogni studio, dichiarate la direzione o il lato del limite, verificate il dominio e cercate un'eventuale forma indeterminata. Scegliete poi una trasformazione, seguita da un teorema le cui ipotesi siano state verificate. Una conclusione distingue limite finito, divergenza a un infinito e assenza di limite. Arrotondamenti e grafici sono controlli, non sostituti di queste tappe.

Quadro del percorso: il programma ufficiale pubblicato per la specializzazione in matematica della Terminale francese, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e il suo allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l'11 ottobre 2026. Esempi, dimostrazioni sviluppate ed esercizi sono testi originali LFDP; non vengono riprodotti testi, figure o prove d'esame di manuali di terzi.

Capitolo 4 - Continuità: dimostrare esistenza, unicità e delimitazioni

Prospettiva storica - Bolzano: l’esistenza richiede una dimostrazione

In un articolo pubblicato nel 1817, Bernard Bolzano fornisce una dimostrazione del teorema dei valori intermedi cercando una giustificazione analitica. Questo fatto illustra la differenza fra vedere una curva attraversare un livello e stabilire l’esistenza di una soluzione sotto ipotesi precise. Il capitolo applica questa distinzione alla continuità, poi separa esistenza, unicità e approssimazione numerica. La prospettiva storica non sostituisce una dimostrazione e non permette di dimenticare un’ipotesi; invita a chiedere esattamente perché il risultato valga.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

1. Tre domande da non confondere

Quando compare un’equazione f(x) = k, sorgono tre domande: ha almeno una soluzione, ne ha una sola e come si può approssimarla? Una calcolatrice che visualizza un numero risponde talvolta alla terza senza aver risposto alle prime due. Una dimostrazione di esistenza non fornisce necessariamente un’espressione esatta. Una dimostrazione di unicità non dimostra automaticamente l’esistenza di una soluzione. Separare queste domande rende il procedimento di risoluzione più sicuro e chiaro.

La continuità svolge un ruolo centrale nell’esistenza. La monotonia stretta può assicurare l’unicità su un intervallo. Un metodo numerico costruisce poi una delimitazione o un’approssimazione. Il ragionamento completa quindi il calcolo: identifica ciò che il calcolo

cerca e perché possa riuscire. L’ultimo numero visualizzato non va presentato come una soluzione esatta quando l’algoritmo ha fornito soltanto un valore approssimato.

Il dominio fa parte del problema. Una funzione contenente una radice o un logaritmo impone restrizioni; un denominatore può escludere un punto. Il teorema dei valori intermedi richiede la continuità sull’intero intervallo considerato. Verificare soltanto i valori ai due estremi non sostituisce questa condizione. Una discontinuità o un punto mancante possono impedire al ragionamento di funzionare.

2. Continuità in un punto e su un intervallo

Una funzione f è continua in un punto a del suo dominio quando il limite di f(x) per x che tende ad a è uguale a f(a), con un avvicinamento adattato al dominio. Questa definizione collega i valori vicini al valore nel punto. Se f(a) non è definita, non si può dichiarare la continuità in a; dopo aver studiato il limite, si potrà forse costruire un prolungamento continuo.

Le funzioni polinomiali sono continue sui reali. Una funzione razionale è continua dove il denominatore è diverso da zero. L’esponenziale è continua sui reali; il logaritmo sui reali strettamente positivi. Somme, prodotti e composizioni di funzioni continue sono continui nei domini appropriati. Un quoziente richiede un denominatore non nullo. Questi strumenti permettono di giustificare la continuità senza tornare alla definizione in ogni esercizio.

L’immagine intuitiva di disegnare «senza staccare la matita» è utile ma limitata. Dipende dalla scala della figura e non costituisce una definizione generale. Una curva calcolata da pochi punti può nascondere un buco o una variazione molto rapida. Viceversa, una funzione definita a tratti può essere continua se valori e limiti si

raccordano correttamente. Il solo nome della formula non decide la proprietà.

3. Raccordare una funzione definita a tratti

Prendiamo $f(x) = x^2$ per $x \leq 1$ e $f(x) = ax + b$ per $x > 1$. A sinistra di 1, il limite è 1; anche il valore $f(1)$ è 1. A destra, il limite è $a + b$. La continuità in 1 richiede quindi $a + b = 1$. Un'infinità di coppie soddisfa questa condizione. Richiedere soltanto la continuità non determina necessariamente tutti i parametri.

Se si richiede anche la derivabilità nel raccordo, la derivata da sinistra è 2 e quella da destra è a; occorre $a = 2$, poi $b = -1$. Questa condizione aggiuntiva risponde a una domanda distinta. Una funzione può essere continua senza essere derivabile, come $|x|$ in zero. Il grafico non ha un salto, ma le pendenze a sinistra e a destra differiscono.

Nella modellizzazione, la continuità può esprimere che una quantità non cambia valore istantaneamente quando attraversa una soglia. La derivabilità può esprimere una transizione di pendenza. Queste proprietà devono tuttavia essere giustificate dal problema reale; non sono esigenze estetiche universali. Una tariffa definita a scaglioni, per esempio, può avere salti intenzionali. Un modello dovrebbe descrivere ciò che è pertinente, non soltanto una curva gradevole da vedere.

4. Il teorema dei valori intermedi

Se f è continua su un intervallo chiuso $[a; b]$, ogni valore k compreso fra $f(a)$ e $f(b)$ viene assunto almeno una volta su quell'intervallo. Per cercare uno zero, si prende $k = 0$. Se $f(a)$ e $f(b)$ hanno segni opposti, la continuità garantisce almeno un c tale che $f(c) = 0$. Se uno dei valori agli estremi è già zero, quell'estremo è esso stesso una soluzione.

Il teorema afferma l'esistenza, non necessariamente l'unicità. Per $f(x) = x^2 - 1$ su $[-2; 2]$, entrambi i valori agli estremi sono positivi; tuttavia la funzione ha due zeri. Un cambiamento di segno agli estremi è una condizione sufficiente per uno zero nel caso usuale, non una condizione necessaria per ogni situazione in cui uno zero esista. Non deducete «nessun cambiamento di segno, quindi nessuna soluzione».

La continuità è essenziale. Una funzione uguale a -1 per $x < 0$ e a 1 per $x \geq 0$ cambia segno fra -1 e 1 senza assumere il valore zero. Anche la funzione $1/x$ ha segni opposti ai due lati di zero, ma non è definita sull'intero intervallo. Questi esempi confutano una versione scorretta del teorema che conserva soltanto i segni agli estremi.

5. Aggiungere l'unicità attraverso la monotonia

Se f è strettamente monotona su un intervallo, non può assumere lo stesso valore in due punti differenti di quell'intervallo. Continuità e delimitazione di un valore danno dunque l'esistenza, mentre la monotonia stretta dà l'unicità. Le giustificazioni possono essere brevi, ma i loro ruoli devono restare distinti nell'argomentazione scritta.

Studiamo $f(x) = e^x - 3x$ su $[0; 1]$. La funzione è continua, $f(0) = 1$ e $f(1) = e - 3 < 0$. Esiste dunque uno zero in $(0; 1)$. La derivata $f'(x) = e^x - 3$ è strettamente negativa su $[0; 1]$, perché $e^x \leq e < 3$. La funzione è strettamente decrescente; lo zero è unico in quell'intervallo. Non serve un'espressione elementare esatta per stabilire questi due risultati.

Su un intervallo più grande, la stessa equazione può avere un'altra soluzione. Qui $f(1) < 0$ e $f(2) = e^2 - 6 > 0$ garantiscono almeno uno zero fra 1 e 2. L'unicità dimostrata su $[0; 1]$ non significa quindi

unicità su tutti i reali. Il dominio della conclusione va dichiarato con la stessa cura del dominio della funzione.

Una derivata strettamente positiva ovunque è una condizione sufficiente per la crescita stretta, non necessaria. La funzione x^3 è strettamente crescente anche se la derivata è nulla in zero. Per $a < b$, la differenza $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$ è positiva: il primo fattore è positivo e il secondo non può essere zero per due reali distinti. Questo argomento algebrico evita una generalizzazione ingiustificata da un solo punto in cui la derivata si annulla.

6. L’immagine di un intervallo e gli estremi

La continuità assicura che l’immagine di un intervallo non contenga valori mancanti fra due valori assunti. Non significa che i valori estremi siano necessariamente quelli ai due estremi dell’intervallo. Per $f(x) = x^2$ su $[-2; 3]$, i valori agli estremi sono 4 e 9, ma zero viene assunto in $x = 0$. L’immagine è $[0; 9]$, non $[4; 9]$. Occorre studiare le variazioni o gli estremi per determinare l’immagine intera.

Una funzione continua su un intervallo chiuso e limitato assume un minimo e un massimo. Questo risultato non può essere trasferito a un intervallo aperto senza esame. La funzione $f(x) = x$ su $(0; 1)$ è limitata ma non assume né zero né uno; non possiede quindi né minimo né massimo su quel dominio. Le limitazioni inferiori e superiori esistono come numeri senza essere necessariamente valori della funzione.

Questa distinzione è utile nell’ottimizzazione. Un calcolo può individuare un valore esterno al dominio o in un estremo escluso. La risposta deve allora precisare se esista un massimo assunto o soltanto una limitazione superiore a cui ci si possa avvicinare. Sostituire un intervallo aperto con uno chiuso per semplificare lo

studio modifica il problema; tale cambiamento va giustificato invece di essere effettuato silenziosamente.

7. Bisezione: conservare un invariante

La bisezione cerca uno zero di una funzione continua in un intervallo i cui valori agli estremi hanno segni opposti. Si calcola il punto medio m = (a + b)/2. Se f(m) = 0 esattamente, il problema è risolto. Altrimenti si conserva la metà i cui valori agli estremi hanno ancora segni opposti. Ogni tappa dimezza la lunghezza dell'intervallo e conserva l'esistenza di almeno uno zero nell'intervallo mantenuto.

Il cambiamento di segno è l'invariante logico del metodo. Se lo zero è unico, gli intervalli successivi lo racchiudono sempre. Dopo N dimezzamenti di un intervallo iniziale di lunghezza L, la lunghezza è L/2^N. Prendere il punto medio finale come approssimazione dà un errore assoluto di al massimo L/(2^(N+1)), sotto le ipotesi esatte del modello matematico. Occorre distinguere i criteri «ampiezza dell'intervallo» ed «errore del punto medio».

Per ottenere un'ampiezza minore o uguale a 0,001 da un intervallo di lunghezza 1, occorre 2^N ≥ 1000, quindi bastano N = 10 dimezzamenti: 1/1024 ≈ 0,0009766. Nove dimezzamenti danno circa 0,001953 e sono insufficienti. Il conteggio dipende dal momento in cui viene misurata l'ampiezza; dichiarare chiaramente un'inizializzazione e una tappa evita uno spostamento d'indice.

8. Spiegare una prima esecuzione

Torniamo a f(x) = e^x − 3x su [0; 1], dove lo zero è unico. Nel punto medio 0,5, f vale circa 0,1487, quindi è positiva. Poiché f(1) è negativa, si conserva [0,5; 1]. Il nuovo punto medio 0,75 dà circa −0,1330, quindi si conserva [0,5; 0,75]. Nel punto medio 0,625, f vale circa −0,00675; si conserva [0,5; 0,625].

L’intervallo non va scelto perché il punto medio «sembra vicino» a zero. Segno e continuità giustificano quale metà conservare. Un piccolo valore di f(m) da solo non assicura che m sia molto vicino allo zero: se la funzione è quasi piatta, una grande distanza orizzontale può corrispondere a una piccola distanza verticale. La delimitazione fornisce un’informazione geometrica diversa dal residuo f(m).

Un programma può verificare se f(a) e f(m) abbiano «lo stesso segno». Nell’aritmetica esatta, un prodotto positivo indica questo caso. Nell’aritmetica in virgola mobile, valori estremamente grandi o piccoli possono provocare un superamento della capacità di rappresentazione o essere arrotondati a zero; confrontare separatamente i segni può essere più robusto. Questa osservazione non richiede la padronanza dell’intera analisi numerica, ma incoraggia a non confondere un’operazione del computer con una dimostrazione esatta.

9. Altri metodi e ragioni per confrontarli

Il metodo di Newton utilizza la tangente: x_(n+1) = x_n − f(x_n)/f'(x_n), quando il denominatore è diverso da zero. Può convergere molto rapidamente in condizioni favorevoli, ma un punto di partenza inadeguato può condurre a divergenza, a un ciclo o a un valore esterno al dominio. È presentato qui come approfondimento, non come sostituto automatico della bisezione o delle aspettative dell’insegnante.

Per f(x) = x³ − 2x + 2 e x_0 = 0, Newton dà x_1 = 0 − 2/(−2) = 1. Poi f(1) = 1 e f'(1) = 1, quindi x_2 = 0. I valori alternano 0 e 1 senza avvicinarsi a uno zero. Un software che si ferma dopo poche iterazioni può visualizzare un numero senza aver ottenuto la soluzione. Un metodo più veloce in circostanze favorevoli non è quindi un metodo universalmente più affidabile.

La bisezione è lenta rispetto ad alcuni metodi locali, ma le sue delimitazioni sono facili da garantire quando le ipotesi vengono rispettate. I metodi possono essere combinati, per esempio utilizzando delimitazioni affidabili e un passo più veloce controllato. Questo confronto illustra un'idea generale: efficienza numerica, garanzie matematiche e facilità di verifica sono criteri distinti.

10. Da un'equazione a una disuguaglianza

Uno zero può organizzare il segno di una funzione. Se f è strettamente decrescente su [a; b] e ha un unico zero α in quell'intervallo, f è positiva prima di α e negativa dopo. Risolvere f(x) ≥ 0 su [a; b] dà allora [a; α]. Lo zero può essere descritto esattamente come «l'unica soluzione di…» anche se se ne conosce soltanto una delimitazione decimale.

Per f(x) = e^x − 3x su [0; 1], il risultato precedente fornisce questa struttura del segno. Non sostituite α con un'approssimazione arrotondata in una risposta descritta come esatta. Si può dare prima l'insieme esatto usando α, poi una delimitazione per l'interpretazione. Questa separazione evita di includere o escludere valori vicini alla soglia soltanto sulla base dell'arrotondamento.

Una funzione non monotona richiede una tabella dei segni più completa. Diversi zeri possono dividere il dominio in diversi intervalli; i segni non alternano sempre quando uno zero è multiplo. Per esempio, $(x - 1)^2$ si annulla in 1 senza diventare negativa. Il teorema di esistenza e gli zeri non sostituiscono quindi lo studio della struttura dell'espressione.

11. Esercizi con soluzioni

A - Continuità in un raccordo. $f(x) = 2x + 1$ per $x < 2$ e $f(x) = x^2 + c$ per $x \geq 2$. **Soluzione:** il limite sinistro in 2 è 5; il valore e il limite destro sono $4 + c$. La continuità richiede $c = 1$. Ciò non assicura la derivabilità: le derivate nel raccordo sarebbero 2 e 4.

B - Esistenza. $P(x) = x^3 - 4x + 1$. Mostrate che uno zero si trova fra 0 e 1. **Soluzione:** il polinomio è continuo, $P(0) = 1$ e $P(1) = -2$. Il teorema dei valori intermedi assicura almeno uno zero. Su $[0; 1]$, $P'(x) = 3x^2 - 4 < 0$, il che assicura l'unicità in questo intervallo. Questa conclusione non riguarda tutti i reali.

C - Numero di dimezzamenti. L'intervallo iniziale ha ampiezza 8. Quale ampiezza si ottiene dopo sei dimezzamenti? **Soluzione:** 8/2^6 = 0,125. Il punto medio ha un errore massimo di 0,0625 rispetto a qualsiasi zero ancora racchiuso. Per questa limitazione dell'errore non è stato utilizzato il valore della funzione nel punto medio.

D - Un teorema dei valori intermedi applicato male. $f(x) = 1/x$ e $f(-1)f(1) < 0$. **Soluzione:** la funzione non è continua su $[-1; 1]$, perché non è definita in zero. Il teorema non si applica. In effetti, $1/x$ non ha alcuno zero nel proprio dominio.

E - Unicità dedotta erroneamente. Una funzione continua ha $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Ha esattamente uno zero? **Soluzione:** non necessariamente; può attraversare l'asse diverse volte. Serve una proprietà aggiuntiva, come la monotonia stretta sull'intervallo, o un'altra dimostrazione di unicità.

12. Ripasso e riferimenti

Per esercitarvi, scrivete paragrafi separati per esistenza, unicità e approssimazione. Nel primo, verificate continuità e valori agli estremi; nel secondo, giustificate la proprietà che impedisce due soluzioni; nel terzo, dichiarate l’invariante e la precisione. Ricostruite poi un esempio in cui ogni ipotesi mancante faccia fallire una conclusione.

Il programma ufficiale pubblicato per la specializzazione in matematica della Terminale francese fornisce il quadro del percorso: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l’11 ottobre 2026. Situazioni, formulazioni ed esercizi sono testi originali LFDP. L’approfondimento su Newton illustra i limiti di un metodo numerico; non è un requisito dichiarato dell’esame né una garanzia di funzionamento di un software.

Capitolo 5 - Derivazione e ottimizzazione: dalla variazione locale alla conclusione

Prospettiva storica - Leibniz: calcolare le variazioni, poi giustificarle

Nel 1684, Leibniz pubblica negli Acta Eruditorum un articolo sul proprio calcolo differenziale, con regole di derivazione e la notazione d. La biografia istituzionale osserva anche che l'articolo non forniva dimostrazioni di quelle regole. Nel ripasso odierno dobbiamo quindi distinguere una regola di calcolo dalle ragioni e dalle condizioni che la rendono valida. Questo capitolo collega il calcolo delle derivate ai domini e all'interpretazione dei segni. La data segna una pubblicazione, senza attribuire l'invenzione del calcolo infinitesimale esclusivamente a una persona.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

1. Comprendere la derivata prima di utilizzarla

Il quoziente $[f(a + h) − f(a)]/h$ misura una variazione media fra due punti per $h \neq 0$. Se questo quoziente ha un limite finito quando h tende a zero, f è derivabile in a e quel limite è $f'(a)$. La derivata esprime quindi un'informazione locale: descrive le variazioni vicino a un punto, non necessariamente il comportamento complessivo sull'intero dominio.

Geometricamente, $f'(a)$ è la pendenza della tangente al grafico nel punto di coordinate $(a; f(a))$. La sua equazione è $y = f(a) + f'(a)(x − a)$. L'equazione contiene sia una pendenza sia un punto; scrivere soltanto $y = f'(a)x$ dimentica generalmente l'intercetta verticale. Una tangente orizzontale significa $f'(a) = 0$; non significa automaticamente $f(a) = 0$.

Se f rappresenta una distanza in metri e x una durata in secondi, la derivata ha unità m/s. Se f rappresenta un’area in m^2 in funzione di una lunghezza in m, la sua derivata ha unità m. La derivazione modifica quindi le unità secondo la variabile. Questa coerenza aiuta a individuare una confusione fra funzione e derivata in un problema applicato.

2. Derivabilità e approssimazione locale

Una funzione derivabile in un punto è continua in quel punto, ma il viceversa è falso. La funzione $|x|$ è continua in zero e non vi ha derivata, perché i rapporti incrementali da sinistra e da destra tendono a -1 e a 1. La continuità raccorda i valori; la derivabilità richiede inoltre una variazione locale compatibile con un’unica pendenza.

Quando f è derivabile in a, possiamo scrivere $f(a + h) = f(a) + f'(a)h$ + un resto che diventa trascurabile rispetto a h. L’approssimazione affine $f(a + h) \approx f(a) + f'(a)h$ è quindi locale. Non è un’uguaglianza generale e la sua precisione dipende dalla funzione e dalla grandezza di h. Per $f(x) = x^2$ vicino ad $a = 2$, si ottiene $f(2 + h) = 4 + 4h + h^2$: il resto è esplicitamente h^2.

Per $h = 0{,}10$, l’approssimazione dà 4,40 e il valore esatto è 4,41. Per $h = 1$, dà 8 invece di 9. La stessa formula lineare diventa meno precisa quando ci allontaniamo dal punto. Senza conoscere o delimitare il resto, non possiamo trasformare una tangente in un errore numerico garantito. Questa prudenza collega un concetto locale al suo uso nei calcoli approssimati.

3. Regole di derivazione e domini

Per due funzioni derivabili u e v, la derivata di una somma è u' + v'. La derivata di un prodotto è u'v + uv', non u'v'. Per un quoziente u/v definito con v ≠ 0, la derivata è (u'v − uv')/v². Un fattore costante si conserva: (ku)' = ku'. I domini vanno determinati prima del calcolo o insieme a esso.

Per una funzione composta g(u(x)), la derivata è g'(u(x))u'(x). Il fattore u' tiene conto della variazione dell'espressione interna. Così, (e^(3x²))' = 6x e^(3x²). Per ln(u(x)), con u(x) > 0, la derivata è u'/u. Per sqrt(u(x)), la formula u'/(2sqrt(u)) può essere utilizzata nei punti in cui u > 0 e valgono le altre ipotesi di derivabilità. Un'espressione definita in un punto non è necessariamente derivabile in quel punto.

Consideriamo f(x) = ln(x² + 1). Il dominio è l'insieme dei reali, perché x² + 1 > 0, e f'(x) = 2x/(x² + 1). Per g(x) = ln(x² − 1), il dominio è (−∞; −1) ∪ (1; +∞). La formula g'(x) = 2x/(x² − 1) assomiglia alla precedente, ma i domini differiscono. Un calcolo formale corretto su un'espressione non elimina la necessità di definire dove sia consentito.

4. Dal segno della derivata al comportamento della funzione

Su un intervallo in cui f è derivabile, una derivata non negativa assicura una funzione non decrescente; una derivata non positiva assicura una funzione non crescente. Una derivata strettamente positiva assicura una crescita stretta. Le formulazioni esatte e gli eventuali punti isolati con derivata nulla vanno esaminati prima di concludere la monotonia stretta. Uno studio completo può utilizzare una tabella dei segni e argomenti aggiuntivi.

L'intervallo conta. Una funzione razionale può avere una derivata dello stesso segno su due parti del dominio separate da un valore escluso; ciò non basta a dichiararla monotona sulla loro unione. Per

f(x) = 1/x, la derivata è negativa su ciascun intervallo (−∞; 0) e (0; +∞). Tuttavia, confrontare x = −1 e x = 1 sull'insieme disconnesso dà f(−1) < f(1), il che non corrisponde a una decrescita globale.

Una derivata nulla in un punto non garantisce un estremo. Per x^3, la derivata si annulla in zero ma la funzione continua a crescere. Un cambiamento del segno di f' da positivo a negativo produce un massimo locale; il cambiamento inverso produce un minimo locale. Occorre poi confrontare gli altri valori candidati prima di individuare un massimo o un minimo globale sul dominio richiesto.

5. Uno studio completo di funzione

Prendiamo f(x) = (x + 1)e^(−x). È definita e derivabile sui reali. Con la regola del prodotto, f'(x) = e^(−x) − (x + 1)e^(−x) = −xe^(−x). Poiché l'esponenziale è sempre positiva, la derivata ha il segno di −x. La funzione è strettamente crescente su (−∞; 0] e strettamente decrescente su [0; +∞). Il massimo globale è f(0) = 1.

A +∞, il prodotto (x + 1)e^(−x) tende a zero grazie al confronto fra crescite, restando positivo per x > −1. A −∞, x + 1 tende a −∞ ed e^(−x) a +∞; il prodotto tende a −∞. La funzione si annulla in x = −1. Questi fatti organizzano un grafico coerente: passaggio per (−1; 0), crescita fino a (0; 1), poi decrescita verso l'asintoto orizzontale y = 0 a destra.

Se il problema restringe x a [0; 4], il massimo resta 1 e il minimo è f(4) = 5e^−4, circa 0,0916. Un risultato su un dominio ristretto va studiato insieme ai suoi estremi. Un punto critico pertinente globalmente può essere escluso da un vincolo; viceversa, un estremo dell'intervallo può diventare il luogo di un ottimo anche quando la derivata lì non è nulla.

6. Costruire una funzione obiettivo sotto un vincolo

L’ottimizzazione comincia prima della derivazione. Definite la quantità da ottimizzare, le variabili, le unità e i vincoli. Per una scatola aperta con base quadrata di lato x e altezza h, un volume prescritto V dà $x^2h = V$, quindi $h = V/x^2$ per $x > 0$. La superficie idealizzata del materiale è $A = x^2 + 4xh$, ovvero $A(x) = x^2 + 4V/x$. Si contano la base e i quattro lati; questo modello non ha coperchio.

Per $V = 32$ dm³, $A(x) = x^2 + 128/x$ in dm², con x in dm. La derivata è $A'(x) = 2x - 128/x^2 = 2(x^3 - 64)/x^2$. Il denominatore è positivo, quindi la derivata è negativa per $0 < x < 4$ e positiva per $x > 4$. La superficie minima si ottiene per $x = 4$ dm; l’altezza è allora $32/16 = 2$ dm e l’area è $16 + 32 = 48$ dm².

Interpretate poi i vincoli effettivi indicati nell’esercizio. Se x dovesse appartenere a [2; 3], il valore 4 sarebbe inammissibile e A sarebbe decrescente sull’intero intervallo: il minimo si troverebbe allora in $x = 3$. Calcolare un ottimo senza dominio risponde a un problema incompleto. Spessore, taglio, resistenza e perdite di materiale sono assenti dal modello; la scatola immaginaria non è un progetto di fabbricazione certificato.

7. Ottimizzazione locale e globale

Un minimo locale significa che i valori vicini sono maggiori o uguali a esso; un minimo globale si confronta con ogni valore del dominio. Una funzione può avere diversi estremi locali. Risolvere $f' = 0$ fornisce candidati interni, non una lista universale di estremi: secondo il dominio vanno esaminati anche i punti non derivabili e gli estremi degli intervalli.

Per $f(x) = x^2$ su $[-1; 2]$, il minimo è in zero e il massimo in 2. La derivata in 2 è 4, non zero. Il massimo si trova a un estremo del dominio; non vi è contraddizione con la condizione usuale per un

estremo interno derivabile. Per |x| su [−1; 1], il minimo è in zero, anche se la funzione non è derivabile lì. Questi due esempi delimitano chiaramente le ipotesi.

La parola «candidato» è quindi utile. Stabilite i punti critici, gli estremi e le eventuali singolarità ammissibili, poi confrontatene i valori o il verso delle variazioni. Per un dominio non limitato, occorre esaminare anche i limiti. Una funzione può avere una limitazione superiore senza assumerla: f(x) = 1 − e^(−x) su [0; +∞) si avvicina a 1 ma non è mai uguale a esso.

8. Derivate e moto: distanza o spostamento?

Una posizione immaginaria è x(t) = 12t − t³ per t in [0; 3], con coefficienti e unità adatti. La velocità è v(t) = 12 − 3t² e l’accelerazione a(t) = −6t. La velocità è positiva prima di t = 2 s, nulla in quell’istante, poi negativa. La posizione cresce fino a x(2) = 16 m, poi decresce fino a x(3) = 9 m.

Lo spostamento fra zero e tre secondi è di 9 m. La distanza percorsa è 16 + (16 − 9) = 23 m, perché il verso cambia. Derivare la posizione e studiare il segno della velocità permette quindi di risolvere una domanda geometrica sul percorso. Usare soltanto x(3) − x(0) come distanza dimenticherebbe la fase di ritorno.

Il segno dell’accelerazione non indica direttamente se il modulo della velocità aumenti o diminuisca. Prima dell’inversione, v > 0 e a < 0: il modulo della velocità diminuisce. Dopo, v < 0 e a < 0: aumenta. Questo collegamento con la fisica mostra perché segni e vettori vadano interpretati, non soltanto calcolati. La derivata fornisce una relazione; il significato delle variabili fornisce la risposta al problema.

9. Controllare una derivata in diversi modi

Un controllo può utilizzare la struttura, il segno atteso e una differenza numerica. Per f(x) = e^(−2x), una derivata positiva sarebbe sospetta perché la funzione decresce. La formula corretta è −2e^(−2x). Per un polinomio, il grado della derivata diminuisce di uno se il termine di grado massimo non è costante. Per una funzione composta, cercate esplicitamente il fattore interno spesso dimenticato.

Un rapporto incrementale con h piccolo può controllare il valore di una derivata: [f(a + h) − f(a)]/h dovrebbe avvicinarsi a f'(a). Non dimostra la formula sull'intero dominio e può subire errori di arrotondamento quando h è troppo piccolo. Una differenza centrale [f(a + h) − f(a − h)]/(2h) può essere utile, ma richiede che entrambi i punti appartengano al dominio.

La coerenza dimensionale fornisce un altro controllo. In un problema di area in funzione di una lunghezza, una derivata espressa in m² invece che in m rivela un errore di rappresentazione o di unità. Un controllo indipendente non significa copiare lo stesso calcolo con gli stessi passaggi: cercate una proprietà o un metodo capace di individuare un altro tipo di errore.

10. Esercizi con soluzioni

A - Prodotto e composizione. Derivate f(x) = x²e^(3x) sui reali. **Soluzione:** f' = 2xe^(3x) + 3x²e^(3x) = xe^(3x)(2 + 3x). Il fattore 3 proviene dall'espressione interna. Gli zeri della derivata sono 0 e −2/3; la loro natura richiede ancora una tabella dei segni.

B - Quoziente. Derivate g(x) = (x + 1)/(x − 2). **Soluzione:** il dominio esclude 2 e g' = [(x − 2) − (x + 1)]/(x − 2)² = −3/(x − 2)². La funzione è decrescente su ciascun intervallo del dominio, senza che si possa dedurre una decrescita globale sulla loro unione.

C - Tangente. Per $f(x) = x^2 + 1$, date la tangente in $a = -1$. **Soluzione:** $f(-1) = 2$ e $f'(-1) = -2$, quindi $y = 2 - 2(x + 1) = -2x$. La retta passa effettivamente per $(-1; 2)$. Una pendenza negativa non significa che l'ordinata del punto sia negativa.

D - Estremi. Studiate $h(x) = x^3 - 3x$ su $[-2; 2]$. **Soluzione:** $h' = 3(x^2 - 1)$, positiva fuori da $[-1; 1]$ e negativa all'interno. I valori candidati sono $h(-2) = -2$, $h(-1) = 2$, $h(1) = -2$ e $h(2) = 2$. Il massimo globale 2 viene assunto in due punti, così come il minimo -2. Un estremo globale non è necessariamente unico.

E - Dominio. Derivate $k(x) = \ln(2 - x)$. **Soluzione:** il dominio è $x < 2$ e $k' = -1/(2 - x)$. La funzione è strettamente decrescente su quel dominio. Scrivere $1/(2 - x)$ dimenticherebbe la derivata interna; studiare $x > 2$ dimenticherebbe il dominio reale del logaritmo.

F - Approssimazione. Stimate $(3{,}02)^2$ mediante una tangente a x^2 in 3, poi date lo scarto esatto. **Soluzione:** l'approssimazione è $9 + 6\times0{,}02 = 9{,}12$. Il valore esatto è 9,1204; lo scarto è $(0{,}02)^2 = 0{,}0004$. Qui il resto può essere calcolato perché la funzione è conosciuta esplicitamente.

11. Ripasso e riferimenti

Un ripasso utile comporta quattro azioni: determinare il dominio, derivare usando la struttura corretta, studiare i segni sugli intervalli, poi interpretare estremi e vincoli. Ripetete una derivazione senza formulario e spiegate ogni fattore. Per l'ottimizzazione, verificate che la funzione obiettivo rappresenti correttamente tutte le quantità conteggiate, poi controllate che la soluzione appartenga al dominio ammissibile.

Riferimento del percorso: il programma pubblicato per la specializzazione in matematica della Terminale francese, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm ; allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultato l'11 ottobre 2026. Tutte le spiegazioni e le

situazioni sono testi originali LFDP, senza riproduzioni di prove d’esame o testi di manuali. Le applicazioni sostengono la comprensione dei metodi e non certificano alcun impianto, processo di fabbricazione o previsione reali.

Capitolo 6 - Convessità: confrontare una curva, le sue corde e le sue tangenti

Prospettiva storica - Jensen: la convessità permette confronti

Nel 1906, Johan Ludwig Jensen pubblica negli Acta Mathematica una disuguaglianza relativa alle funzioni convesse. Questa tappa dà contesto all'idea centrale del capitolo: la forma di una funzione impone confronti fra valori, corde e tangenti. Qui lavoriamo con proprietà dimostrate e criteri accessibili al livello previsto, senza trasformare la forma generale della disuguaglianza di Jensen in un requisito aggiuntivo d'esame. La storia ricorda perché la convessità sia utile; un'illustrazione o un nome celebre non eliminano mai la necessità di verificare l'intervallo e le ipotesi.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jensen/

1. Una proprietà diversa dalla crescita e dalla decrescita

Il verso delle variazioni indica se i valori di una funzione aumentino o diminuiscano. La convessità descrive un'altra struttura: la posizione della curva rispetto alle corde che uniscono due suoi punti. Una funzione convessa può decrescere e poi crescere, oppure decrescere sull'intero dominio. È quindi scorretto usare «convessa» come sinonimo di «crescente».

Per f(x) = (x − 1)², la funzione decresce fino a 1 e poi cresce, ma è convessa su tutti i reali. Per f(x) = e^(−x), è decrescente e convessa. Questi esempi separano due domande che una figura può talvolta confondere. In uno studio completo, il segno di f' informa sulla crescita e sulla decrescita; le variazioni di f' e, quando esiste, il segno di f'' informano sulla convessità.

L’utilità è concreta. La convessità permette di confrontare valori senza calcolarli tutti esattamente, delimita una funzione attraverso rette e giustifica alcune disuguaglianze. Illumina anche l’ottimizzazione: per una funzione convessa derivabile, un punto interno in cui la derivata si annulla è un minimo globale sull’intervallo considerato. Resta essenziale verificare che quel punto appartenga al dominio del problema.

2. Definizione mediante le corde

Una funzione f è convessa su un intervallo I se, per ogni a e b in I e ogni λ in [0; 1], $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$. Il punto $(1 - \lambda)a + \lambda b$ si trova fra a e b. Il membro destro è l’ordinata del punto corrispondente sulla corda del grafico. La curva si trova quindi sotto tale corda.

Per una funzione concava, la disuguaglianza è invertita. Una funzione affine è sia convessa sia concava, perché la curva e tutte le sue corde coincidono. La convessità stretta richiede una disuguaglianza stretta per $a \neq b$ e $0 < \lambda < 1$. Questa distinzione separa una struttura generale dall’assenza di segmenti affini.

Nel punto medio, $\lambda = 1/2$, la definizione dà $f((a + b)/2) \leq [f(a) + f(b)]/2$. Per $f(x) = x^2$, diventa $((a + b)/2)^2 \leq (a^2 + b^2)/2$. Sviluppando, si vede che la differenza fra membro destro e membro sinistro è $(a - b)^2/4$, che è non negativa. Questa dimostrazione diretta conferma una disuguaglianza particolare e rivela il ruolo dello scarto fra a e b.

La media delle immagini non è quindi generalmente l’immagine della media. L’uguaglianza automatica vale soltanto in situazioni particolari, soprattutto per una funzione affine. Questa differenza è utile nelle applicazioni, ma una conclusione pratica richiede anche di verificare che la funzione scelta rappresenti effettivamente il fenomeno studiato.

3. Il criterio della derivata e le derivate seconde

Su un intervallo in cui f è derivabile, f è convessa se e soltanto se f' è non decrescente. Se f è derivabile due volte, una derivata seconda non negativa sull'intervallo assicura la convessità; una non positiva assicura la concavità. La derivata seconda esprime la variazione della pendenza. Una pendenza negativa che diventa meno negativa può quindi corrispondere a una convessità.

Per f(x) = e^(−x), f' = −e^(−x) è negativa ma crescente, perché f'' = e^(−x) > 0. La funzione diminuisce sempre meno rapidamente. Per f(x) = ln(x), su x > 0, f' = 1/x è positiva ma decrescente e f'' = −1/x² < 0: il logaritmo cresce, con una pendenza che diminuisce. Variazioni e convessità forniscono quindi due informazioni complementari.

Il segno va studiato su un intervallo, non in un solo punto. Il fatto che f''(a) > 0 fornisce un'informazione locale se condizioni appropriate permettono di estenderla a un intorno, ma non dimostra la convessità sull'intero dominio. Analogamente, la derivata seconda può non esistere in alcuni punti di una funzione che è comunque convessa: |x| ne è un esempio. La definizione tramite le corde è più generale del criterio pratico della derivata seconda.

4. Tangenti e dimostrazione di una disuguaglianza

Per una funzione convessa derivabile, la curva si trova sopra ciascuna tangente sull'intervallo di convessità. Nel punto a, si scrive f(x) ≥ f(a) + f'(a)(x − a). Per una funzione concava, la curva si trova sotto. Le descrizioni «sotto le corde» e «sopra le tangenti» non si contraddicono: una corda unisce due punti distinti, mentre una tangente descrive una pendenza locale.

Una giustificazione del risultato per una funzione convessa definisce h(x) = f(x) − f(a) − f'(a)(x − a). La sua derivata è f'(x) −

f'(a). Poiché f' è non decrescente, h' è non positiva prima di a e non negativa dopo a. Così, h assume il minimo in a, dove h(a) = 0. Si ottiene h(x) ≥ 0. La dimostrazione usa il comportamento di una funzione ausiliaria e fornisce uno strumento riutilizzabile.

Per f(x) = e^x, la tangente in zero è y = 1 + x. La convessità dà quindi e^x ≥ 1 + x per ogni reale x. Questa disuguaglianza è una limitazione, non un'approssimazione sempre precisa. Per x molto negativo, la retta può essere negativa mentre l'esponenziale resta positiva. Vicino a zero, dà un'approssimazione locale il cui errore richiede uno studio ulteriore.

5. Delimitare il logaritmo

Il logaritmo è concavo sui reali positivi. La tangente in 1 è y = x − 1. Si ottiene ln(x) ≤ x − 1 per x > 0, con uguaglianza in 1. Sostituire x con 1 + h dà ln(1 + h) ≤ h per h > −1. Il dominio è essenziale; ln(1 + h) non è reale se h ≤ −1.

Un'altra tangente fornisce una limitazione inferiore. Prendiamo la tangente a ln nel punto x > 0 e valutiamo la sua limitazione superiore in 1: ln(1) ≤ ln(x) + (1/x)(1 − x). Poiché ln(1) = 0, si ottiene ln(x) ≥ 1 − 1/x. Insieme, le due limitazioni danno 1 − 1/x ≤ ln(x) ≤ x − 1 per x > 0.

Per x = 1,10, queste limitazioni diventano 0,090909... ≤ ln(1,10) ≤ 0,10. Il valore numerico è circa 0,09531. Le limitazioni non dipendono da quest'ultimo valore: sono dimostrate prima del calcolo approssimato. Per x lontano da 1, possono non essere strette. Una limitazione valida non è necessariamente la migliore per ogni domanda.

6. Punti d’inflessione: un cambiamento di convessità

Un punto d’inflessione è associato a un cambiamento di convessità vicino a un punto della curva. Per una funzione sufficientemente regolare, un cambiamento di segno di f'' ai due lati ne individua spesso uno. La sola uguaglianza f''(a) = 0 è insufficiente. Occorre esaminare il segno o la convessità attorno al punto e il punto deve appartenere alla curva.

Per f(x) = x³, f''(x) = 6x cambia segno in zero: la funzione è concava a sinistra e convessa a destra. L’origine è un punto d’inflessione. Per g(x) = x^4, g''(x) = 12x² si annulla in zero ma resta positiva ai due lati; non c’è cambiamento di convessità. Zero è un punto di minimo, non d’inflessione.

Un valore escluso dal dominio non può essere un punto d’inflessione della curva, anche se i segni di f'' differiscono su due intervalli separati. Per 1/x, la derivata seconda 2/x³ cambia segno ai due lati di zero, ma la funzione non è definita in zero. La conclusione corretta riguarda la convessità su ciascun intervallo, non un punto inesistente.

7. Studio dettagliato di un polinomio

Consideriamo f(x) = x^4 − 4x³. Le derivate sono f'(x) = 4x²(x − 3) e f''(x) = 12x(x − 2). Il segno di f'' è positivo per x < 0, negativo per 0 < x < 2, poi positivo per x > 2. La funzione è dunque convessa, poi concava, poi convessa su questi intervalli. I punti di coordinate (0; 0) e (2; −16) sono punti d’inflessione.

La derivata prima è negativa per x < 3, salvo l’annullamento nel punto isolato zero, e positiva per x > 3. La funzione decresce fino a 3, poi cresce; possiede un minimo in x = 3, di valore −27. Il punto d’inflessione in zero non è quindi un estremo. Lo stesso grafico illustra perché derivata nulla, estremo e punto d’inflessione siano tre concetti distinti.

La tangente in 2 ha pendenza $f'(2) = -16$ e passa per $(2; -16)$. L'equazione è $y = -16 - 16(x - 2)$, ovvero $y = -16x + 16$. È essenziale verificare la pendenza e il passaggio della retta per il punto. Vicino a un punto d'inflessione, in questo caso regolare la curva cambia posizione rispetto a tale tangente; lo si può studiare direttamente scomponendo la differenza, se la domanda lo richiede.

Per la tangente in zero, sia pendenza sia ordinata sono nulle: è l'asse orizzontale. Vicino a zero, $f(x) = x^3(x - 4)$ è positiva a sinistra e negativa a destra. In questo esempio la curva attraversa quindi la propria tangente. Questa osservazione locale non va trasformata in un criterio universale senza le necessarie ipotesi di regolarità.

8. Convessità e minimo globale

Se f è convessa e derivabile su un intervallo e $f'(a) = 0$ in un punto interno a, la disuguaglianza della tangente dà $f(x) \geq f(a)$ per ogni x dell'intervallo. Il punto a è quindi un minimo globale. Se f è strettamente convessa, questo minimo è unico. La dimostrazione spiega perché una proprietà locale della pendenza possa produrre qui una conclusione globale: la convessità fornisce l'informazione aggiuntiva.

Per $f(x) = x^2 + 8/x$ su $x > 0$, $f''(x) = 2 + 16/x^3 > 0$. La funzione è strettamente convessa. La derivata $2x - 8/x^2$ si annulla quando $x^3 = 4$, quindi in a = radice cubica di 4. Questo punto dà l'unico minimo globale. Non occorre rifare una lunga tabella delle variazioni per stabilire l'unicità, anche se i limiti o una tabella possono fornire un controllo.

Se il dominio ammissibile è un sottointervallo che non comprende a, il minimo va cercato su quel dominio. La convessità non rende ammissibile un valore escluso. Un'applicazione richiede quindi due

livelli: comprendere la funzione matematica, poi rispettare i vincoli del problema. Un ottimo teorico non convalida una decisione reale i cui costi o rischi non siano stati modellizzati.

9. Medie e dispersione: un’illustrazione originale

Prendiamo due misure a e b. La convessità della funzione quadrato dà che il quadrato della loro media è minore o uguale alla media dei loro quadrati. La differenza è $(a - b)^2/4$. Per $a = 2$ e $b = 6$, il quadrato della media è 16 e la media dei quadrati è 20; la differenza è 4. Questo scarto è collegato alla dispersione e scompare soltanto quando i due valori coincidono.

Per diversi numeri con pesi positivi la cui somma è 1, un’estensione della disuguaglianza di convessità confronta la funzione della media ponderata con la media ponderata dei valori della funzione. Questa estensione, spesso chiamata disuguaglianza di Jensen, è proposta come approfondimento; non è un requisito particolare d’esame dichiarato. Può essere dimostrata applicando ripetutamente la definizione a due punti.

La portata pratica dipende dal modello. Se un consumo immaginario è proporzionale al quadrato di una velocità, variare la velocità attorno alla stessa media può aumentare il consumo medio. Ciò non stabilisce il bilancio di un veicolo reale senza considerare durata, distanza, accelerazione e meccanismi effettivamente coinvolti. La disuguaglianza matematica resta esatta; l’interpretazione empirica richiede dati aggiuntivi.

10. Leggere e costruire una tabella della convessità

Uno studio efficace comincia dal dominio e dagli intervalli in cui le derivate esistono. Calcolate f'', scomponete se possibile e studiatene il segno. Deducete gli intervalli di convessità e concavità, poi verificate i candidati punti d’inflessione. Le loro coordinate richiedono ancora di valutare f nelle ascisse conservate.

Non confondete la tabella dei segni di f con quelle di f' e f''. La prima descrive i valori positivi e negativi della funzione; la seconda crescita e decrescita; la terza, sotto le condizioni dichiarate, la convessità. Una funzione negativa può essere convessa; una positiva può essere concava; un punto d’inflessione può avere un’ordinata non nulla. Le tre tabelle rispondono a domande differenti.

Su un grafico, osservare se la pendenza aumenti o diminuisca può aiutare. Resta un controllo qualitativo dipendente dalla scala e dalla precisione del disegno. Una tabella basata su un’espressione esatta fornisce una giustificazione più forte. Se è fornito soltanto un documento grafico, dichiarate le conclusioni al livello di precisione che permette e individuate le ipotesi formulate nella lettura.

11. Esercizi con soluzioni

A - Variazioni e convessità. Studiate entrambe le proprietà per e^(−2x). **Soluzione:** f' = −2e^(−2x) < 0 e f'' = 4e^(−2x) > 0. La funzione è decrescente e strettamente convessa. Queste proprietà non sono opposte.

B - Tangente al logaritmo. Scrivete la tangente a ln(x) in 2 e confrontatela con la funzione. **Soluzione:** y = ln(2) + (x − 2)/2. La concavità dà ln(x) ≤ ln(2) + (x − 2)/2 per x > 0. Il risultato vale sull’intero dominio di concavità, non soltanto in un piccolo intorno di 2.

C - Inflessione. f(x) = x^5. **Soluzione:** f''(x) = 20x³ cambia segno in zero. L'origine è un punto d'inflessione. La derivata prima 5x^4 è non negativa; la funzione resta crescente, confermando che l'inflessione non cambia necessariamente il verso delle variazioni.

D - Limitazione esponenziale. Mostrate che e^(2x) ≥ 1 + 2x. **Soluzione:** applicare la disuguaglianza e^t ≥ 1 + t a t = 2x, oppure utilizzare la tangente in zero alla funzione e^(2x). Entrambi gli approcci producono la stessa limitazione con ipotesi valide su tutti i reali.

E - Media. Per 1 e 5, confrontate il quadrato della media con la media dei quadrati. **Soluzione:** la media è 3, il suo quadrato 9; la media dei quadrati è (1 + 25)/2 = 13. La differenza 4 è uguale a (5 − 1)²/4. Sostituire una media di quadrati con un quadrato della media eliminerebbe quindi un'informazione sulla dispersione.

F - Uno zero di f''. Una funzione ha f''(a) = 0. Si può concludere che vi sia un punto d'inflessione? **Soluzione:** no. Occorre stabilire un cambiamento di convessità. Il controesempio x^4 in zero mostra che il solo annullamento della derivata seconda è insufficiente.

12. Ripasso e riferimenti

Ripassate la convessità attraverso tre rappresentazioni: curva sotto le corde, curva sopra le tangenti e derivata non decrescente. Occorre saper trasformare una rappresentazione in una disuguaglianza, poi spiegarne il dominio. Per i punti d'inflessione, verificate il cambiamento di convessità e le coordinate. Un quaderno contenente i controesempi x^4, |x| e 1/x aiuta a conservare le ipotesi esatte.

Quadro del percorso: il programma ufficiale pubblicato per la specializzazione in matematica della Terminale francese, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e l'allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l'11 ottobre 2026. Dimostrazioni, esempi ed esercizi

sono testi originali LFDP. Gli approfondimenti sono esplicitamente distinti da un annuncio dei contenuti d’esame; non vengono riprodotti manuali o prove di terzi.

Capitolo 7 - Esponenziali, logaritmi e trigonometria: trasformare senza perdere il dominio

Prospettiva storica - Napier: trasformare un calcolo difficile

John Napier presenta i propri logaritmi in un libro pubblicato nel 1614, con l'obiettivo di semplificare calcoli lunghi. I suoi logaritmi non sono identici al logaritmo naturale insegnato oggi. Il confronto utile riguarda la trasformazione di un problema: sostituire un prodotto con una somma può rendere più facile studiare una relazione, ma soltanto quando sono soddisfatte le condizioni del logaritmo. Il capitolo distingue quindi identità, domini e usi nelle equazioni o nei modelli. Uno strumento di calcolo diventa più potente quando comprendiamo ciò che conserva e ciò che richiede.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/

1. Tre famiglie e tre strutture

L'esponenziale descrive in particolare un'evoluzione proporzionale a un valore corrente. Il logaritmo trasforma rapporti moltiplicativi in differenze additive e consente di invertire l'esponenziale sui valori positivi. La trigonometria rappresenta angoli, proiezioni ed evoluzioni periodiche. Queste funzioni possono comparire nello stesso problema, ma non obbediscono alle stesse identità e non hanno gli stessi domini.

Un metodo affidabile definisce il dominio prima di effettuare una trasformazione, poi individua la struttura: prodotto, potenza, composizione o periodicità. Una somiglianza grafica non basta a scegliere una legge. Una crescita esponenziale non è una crescita

lineare più veloce; una sinusoide non rappresenta ogni oscillazione reale; un logaritmo non permette di applicare alle somme le regole che possiede per i prodotti.

Anche gli argomenti delle funzioni richiedono interpretazione. In un modello e^(kt), il prodotto kt deve essere adimensionale. Se t è espresso in secondi, k ha unità s^−1. In ln(q/q_0), il rapporto fra due quantità con la stessa unità è adimensionale. Scrivere il logaritmo di un valore numerico presuppone una convenzione di unità o una normalizzazione; altrimenti, cambiare arbitrariamente l'unità può modificare il valore calcolato.

2. L'esponenziale: proprietà e crescita

L'esponenziale è definita sui reali, strettamente positiva e strettamente crescente. Soddisfa e^0 = 1, e^(a+b) = e^a e^b ed e^(−a) = 1/e^a. La sua derivata coincide con la funzione stessa; per e^(u(x)), la derivata diventa u'(x)e^(u(x)). Le proprietà algebriche permettono di trasformare un prodotto o un quoziente, non di sommare gli esponenti in una somma di esponenziali.

Così, e^a + e^b non è e^(a+b). Con a = b = 0, la prima espressione è 2 e la seconda 1. Analogamente, e^(2x) = (e^x)², ma e^(x²) non è (e^x)². La posizione delle parentesi descrive funzioni differenti. Un controesempio semplice può individuare un'identità dubbia prima che si propaghi nell'intero calcolo.

I limiti sono e^x → +∞ quando x → +∞ ed e^x → 0 quando x → −∞. L'esponenziale non è mai uguale a zero per un reale finito. Una calcolatrice che visualizza zero per un valore molto negativo può aver raggiunto il proprio limite di rappresentazione; quel risultato visualizzato non è una nuova proprietà matematica.

3. Risolvere un’equazione esponenziale mediante sostituzione

Consideriamo e^(2x) − 5e^x + 6 = 0. Poniamo Y = e^x, con Y > 0. L’equazione diventa $Y^2 - 5Y + 6 = 0$, ovvero (Y − 2)(Y − 3) = 0. Entrambi i candidati, 2 e 3, rispettano il dominio di Y. Poiché l’esponenziale è una biiezione dai reali ai reali positivi, le soluzioni sono x = ln(2) e x = ln(3).

La sostituzione non elimina il requisito del dominio. Se un altro polinomio fornisse una radice negativa Y, essa non corrisponderebbe ad alcun e^x reale. Risolvete prima l’equazione algebrica, poi filtrate i candidati e tornate alla variabile originaria. Queste tappe devono comparire nella soluzione scritta per mostrare che sono state conservate tutte le soluzioni e soltanto quelle.

Per la disuguaglianza e^(2x) − 5e^x + 6 ≤ 0, la tabella dei segni del polinomio dà 2 ≤ Y ≤ 3. Il logaritmo crescente permette di concludere ln(2) ≤ x ≤ ln(3). Un’equazione fornisce punti; una disuguaglianza fornisce qui un intervallo. Riutilizzare soltanto le due radici come insieme delle soluzioni della disuguaglianza sarebbe insufficiente.

4. Il logaritmo: inversa e regole esatte

Il logaritmo naturale è definito sui reali strettamente positivi. È l’inversa dell’esponenziale: ln(e^x) = x per ogni reale x ed e^(ln y) = y per y > 0. È strettamente crescente e la sua derivata è 1/x. Il valore in 1 è zero; è negativo fra zero e uno e positivo sopra uno.

Per a > 0 e b > 0, ln(ab) = ln(a) + ln(b). Lo si può giustificare esponenziando la somma: e^(ln a + ln b) = ab, poi usando l’unicità della controimmagine rispetto all’esponenziale. Si ottiene anche ln(a/b) = ln(a) − ln(b). Per una potenza intera di base positiva, la

regola deriva dalla ripetizione; per una potenza reale definita da a^r = e^(r ln a), dà ln(a^r) = r ln(a).

I domini non si semplificano automaticamente con la formula. Per $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$, perché $|x|$ è positivo. Scrivere $2\ln(x)$ escluderebbe x negativi, anche se x^2 è positivo. Per $\ln(x) + \ln(y)$, entrambi gli argomenti devono essere positivi; il solo fatto che $xy > 0$ non basta se x e y sono entrambi negativi.

5. Equazioni logaritmiche e controllo

Risolviamo $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(8)$. Il dominio richiede $x - 1 > 0$ e $x + 1 > 0$, quindi $x > 1$. Su quel dominio, la somma diventa $\ln(x^2 - 1)$. L'iniettività del logaritmo dà $x^2 - 1 = 8$, ovvero $x^2 = 9$. I candidati sono 3 e -3, ma soltanto 3 soddisfa il dominio originario.

Per $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) \leq \ln(8)$, il logaritmo crescente dà $x^2 - 1 \leq 8$ su $x > 1$. L'insieme delle soluzioni è $(1; 3]$. Non è $[-3; 3]$, perché gli argomenti originari devono restare positivi. Il dominio è un vincolo conservato attraverso ogni trasformazione, non un controllo facoltativo alla fine del calcolo.

Un'equazione $\ln(u(x)) = 0$ è equivalente a $u(x) = 1$ quando il logaritmo è definito. Un'equazione $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ richiede $u > 0$ e $v > 0$ prima di poter concludere $u = v$. Risolvere soltanto $u = v$ può introdurre punti in cui entrambe le espressioni sono negative. La successione dei passaggi deve quindi conservare le condizioni di positività.

6. Crescita moltiplicativa e soglia intera

Un'evoluzione immaginaria che aumenta del 5% a ogni tappa segue $q_n = q_0(1{,}05)^n$ se il modello e la percentuale restano costanti. Per cercare il primo indice in cui $q_n \geq 2q_0$ con $q_0 > 0$, si ottiene $(1{,}05)^n \geq 2$, poi $n \geq \ln(2)/\ln(1{,}05)$, circa 14,21. Il primo intero ammissibile è 15.

Il controllo dà (1,05)^14 ≈ 1,980 e (1,05)^15 ≈ 2,079. L'indice 14 è insufficiente; 15 è sufficiente. I due confronti stabiliscono la minimalità nel modello. Il ragionamento resta puramente matematico: non prevede alcun rendimento, popolazione o capacità reali senza convalidare la regola di evoluzione.

Per una diminuzione con un fattore fra zero e uno, il logaritmo del fattore è negativo e la divisione inverte la disuguaglianza. È il punto critico di molti problemi di soglia. Un modo per controllare una risposta consiste nel provare i due indici vicini nell'espressione originaria invece di fidarsi di una successione di segni copiata troppo rapidamente.

7. Logaritmi con basi differenti

Per una base $a > 0$, $a \neq 1$, il logaritmo in base a è $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$, per $x > 0$. È crescente se $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$. Il logaritmo decimale corrisponde ad $a = 10$. Cambiare base permette di utilizzare una calcolatrice che possieda soltanto ln o il logaritmo decimale.

Moltiplicare un rapporto per 100 aumenta il suo logaritmo decimale di 2. Questa struttura spiega l'utilità di una scala logaritmica per confrontare ordini di grandezza. Se un livello è definito da $10\log_{10}(I/I_0)$, moltiplicare I per 100 aggiunge 20 al livello, con lo stesso riferimento I_0. Non significa che la quantità fisica sia stata moltiplicata per 20.

Una differenza di logaritmi corrisponde al logaritmo di un rapporto. Sommare livelli logaritmici non rappresenta quindi automaticamente la somma di quantità fisiche. Per sommare intensità, tornate alle intensità e poi applicate la definizione del livello. Interpretare la scala è importante quanto usare i tasti della calcolatrice.

8. Angoli e circonferenza goniometrica

Il radiante misura un angolo attraverso il rapporto fra la lunghezza di un arco e il raggio della circonferenza. Un giro completo corrisponde a 2π radianti, ovvero 360°. Un mezzo giro è π radianti e un angolo retto π/2. Le derivate usuali di sin e cos utilizzano argomenti espressi in radianti. Una calcolatrice impostata sui gradi può quindi produrre valori incompatibili con una formula quando si dimentica questa convenzione.

Sulla circonferenza unitaria, un punto associato a un angolo x ha coordinate (cos x; sin x). L’identità cos²x + sin²x = 1 discende dalla sua appartenenza alla circonferenza. Il coseno è pari, il seno dispari ed entrambi sono periodici di periodo 2π. Un valore trigonometrico non identifica un angolo unico senza un intervallo o altre informazioni.

Le formule di addizione collegano gli angoli: cos(a + b) = cos a cos b − sin a sin b e sin(a + b) = sin a cos b + cos a sin b. Prendere a = b = x permette di ritrovare sin(2x) = 2sin x cos x e cos(2x) = cos²x − sin²x. Queste identità possono trasformare un’espressione; non devono essere confuse con cos(a + b) = cos a + cos b, che è falsa.

9. Risolvere un’equazione trigonometrica

L’equazione cos x = 1/2 ha soluzioni x = π/3 + 2kπ oppure x = −π/3 + 2kπ, con k intero. Su [0; 2π], si ottengono π/3 e 5π/3. La circonferenza spiega le due famiglie attraverso la simmetria. Scrivere soltanto π/3 ometterebbe alcune soluzioni; scrivere una famiglia infinita senza filtrare l’intervallo trascurerebbe la domanda posta.

Per sin x = −sqrt(2)/2 su [0; 2π], le soluzioni sono 5π/4 e 7π/4. Il seno corrisponde all’ordinata, quindi i punti si trovano nella metà inferiore della circonferenza. Conoscere gli angoli di riferimento e i

segni per quadrante permette di ricostruire i valori invece di memorizzare una lista priva di struttura.

La periodicità richiede attenzione agli estremi. Se l'equazione ammette $x = 0$ e il dominio è $[0; 2\pi]$, il valore 2π può anche essere una soluzione numerica distinta, pur rappresentando lo stesso punto sulla circonferenza. Su $[0; 2\pi)$, è escluso. La notazione dell'intervallo deve quindi essere mantenuta fino alla risposta finale.

10. Derivate e periodicità di una funzione composta

Le derivate usuali sono $(\sin x)' = \cos x$ e $(\cos x)' = -\sin x$. Per $f(x) = \cos(3x)$, $f' = -3\sin(3x)$. Il periodo è $2\pi/3$, perché aumentare x di tale quantità aumenta l'argomento di 2π. La frequenza di una funzione $\cos(\omega t)$ corrisponde a $|\omega|/(2\pi)$ quando t è una durata e ω una pulsazione in radianti per unità di tempo.

La funzione $\sin^2 x$ ha periodo π, anche se $\sin x$ ha periodo 2π: cambiare il segno del seno non ne cambia il quadrato. Una trasformazione può quindi modificare il periodo minimo. Non ogni periodo di una funzione è necessariamente il suo periodo positivo minimo. Distinguete un valore che funziona dalla caratteristica fondamentale cercata.

Per $\sin x + \cos x$, un'identità dà $\sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$. Questa espressione rivela un'ampiezza $\sqrt{2}$, un periodo 2π e uno sfasamento. La somma di due sinusoidi con la stessa frequenza può quindi restare una sinusoide con ampiezza e fase differenti. Con frequenze diverse, una riduzione così semplice non è generalmente possibile.

11. Approssimazioni locali e controlli

Vicino a zero, la derivabilità dà e^h ≈ 1 + h, ln(1 + h) ≈ h e sin h ≈ h, con domini e convenzioni appropriati. Queste approssimazioni sono locali. Per sin h, h deve essere espresso in radianti. Non diventano uguaglianze perché un esercizio dichiara «piccolo»; la precisione richiesta va discussa se si utilizza un valore numerico.

La convessità fornisce un'informazione sul segno di alcune differenze. Sappiamo che e^h ≥ 1 + h e la concavità del logaritmo dà ln(1 + h) ≤ h per h > −1. Le approssimazioni costituiscono quindi rispettivamente una limitazione inferiore e una superiore in quei domini. Ciò non basta a determinare la grandezza dell'errore; possono servire limitazioni più strette o uno studio del resto.

Per controllare un calcolo, esaminate valori di riferimento: e^0 = 1, ln 1 = 0, sin 0 = 0, cos 0 = 1. Verificate segni, dominio e periodicità. Una trasformazione che cambia una di queste proprietà conosciute va riesaminata. Questa strategia individua errori prima di un calcolo più lungo senza pretendere di sostituire una dimostrazione.

12. Esercizi con soluzioni e ripasso

A - Esponenziale. Risolvete e^(2x) = 7. **Soluzione:** 2x = ln 7, quindi x = (ln 7)/2. Risolvere e^x = 7 e poi dimenticare il fattore 2 darebbe un altro valore. La positività di 7 rende possibile la trasformazione.

B - Dominio logaritmico. Risolvete ln(3 − x) ≥ 0. **Soluzione:** il dominio è x < 3. Il logaritmo è non negativo per un argomento almeno uguale a 1, quindi 3 − x ≥ 1, ovvero x ≤ 2. L'insieme delle soluzioni è (−∞; 2], già contenuto nel dominio.

C - Identità. Semplificate ln(5x) − ln(x) per x > 0. **Soluzione:** ln(5x/x) = ln 5. Se x fosse negativo, le espressioni originarie non sarebbero

definite sui reali. Il risultato costante non estende automaticamente il dominio.

D - Trigonometria. Risolvete sin(2x) = 0 su [0; π]. **Soluzione:** 2x = kπ, quindi x = kπ/2. Filtrare dà 0, π/2 e π. L'intervallo dell'argomento è [0; 2π], con entrambi gli estremi inclusi.

E - Derivazione. Derivate ln(1 + e^x). **Soluzione:** l'argomento è positivo su tutti i reali e la derivata è e^x/(1 + e^x). È compresa fra zero e uno, fornendo un controllo di segno e grandezza.

F - Periodo. Date un periodo fondamentale di cos(4t). **Soluzione:** 2π/4 = π/2. Anche il valore 2π è un periodo, ma non il più piccolo positivo. Non confondete argomento, pulsazione e frequenza.

Ripassate ricostruendo domini, identità e trasformazioni invece di memorizzare equazioni isolate. Per ogni soluzione, indicate se sia esatta, approssimata, unica o appartenente a una famiglia periodica. Quadro del percorso: il programma pubblicato della Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e l'allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l'11 ottobre 2026. Testo ed esercizi sono originali LFDP; non vengono presentate previsioni reali o riproduzioni di prove di terzi.

Capitolo 8 - Primitive e integrali: misurare un’accumulazione e controllare un’approssimazione

Prospettiva storica - Cavalieri: pensare all’area prima del calcolo integrale moderno

La Geometria di Bonaventura Cavalieri viene pubblicata nel 1635 e presenta il suo metodo degli indivisibili. È una tappa storica nello studio delle aree e dei volumi. In questo capitolo, suddividere e sommare aiuta a comprendere l’integrale, ma le definizioni e le giustificazioni moderne non si riducono a quel metodo precedente. Il collegamento didattico è il passaggio da una figura intera a contributi confrontabili, poi a un risultato controllato. Questa prospettiva non attribuisce l’invenzione dell’integrazione al solo Cavalieri e non confonde l’intuizione geometrica con una dimostrazione moderna.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/

1. Una quantità accumulata, non un valore istantaneo

La potenza dà l’energia per unità di tempo; l’energia ricevuta durante un intervallo dipende dall’intera evoluzione della potenza. La velocità dà lo spostamento per unità di tempo; lo spostamento dipende dalle variazioni della velocità durante il percorso. Un integrale calcola questa accumulazione. Non sostituisce quindi la funzione iniziale con una «media» senza precisare come tale media sia definita.

Per una funzione continua non negativa su [a; b], l’integrale può essere introdotto attraverso l’area sotto la curva fra i due estremi. Rettangoli sempre più stretti approssimano quell’area. Per una

funzione di segno qualsiasi, l’integrale diventa orientato: i contributi sotto l’asse sono negativi. L’area geometrica totale e l’integrale possono allora differire.

L’unità dell’integrale è l’unità della funzione moltiplicata per quella della variabile. Una potenza in watt integrata sui secondi dà joule; una velocità in m/s integrata sui secondi dà metri. Se gli assi sono numeri senza unità, si parla di unità d’area per l’interpretazione geometrica. Questo controllo collega il calcolo alla domanda effettivamente posta.

2. Primitive: una famiglia di funzioni

Una primitiva F di f su un intervallo I è una funzione derivabile tale che F' = f su I. Se F è una primitiva, lo è anche F + C per qualsiasi costante C. Viceversa, due primitive della stessa funzione su un intervallo differiscono per una costante. La parola «intervallo» conta: su un dominio composto da parti separate, le costanti possono differire su ciascuna parte.

Per f(x) = 2x, F(x) = x² è una primitiva. Per f(x) = e^(3x), F(x) = e^(3x)/3 è adatta. Per f(x) = cos(4x), F(x) = sin(4x)/4. Controllate ogni proposta mediante derivazione. Il fattore interno deve essere compensato; scrivere e^(3x) come primitiva di e^(3x) dimenticherebbe il fattore 3 nella derivata.

Una condizione aggiuntiva determina la costante. Se F' = 2x e F(1) = 5, allora F(x) = x² + C e 1 + C = 5, quindi C = 4. La condizione iniziale trasforma una famiglia in una funzione determinata. Questa idea verrà riutilizzata nelle equazioni differenziali: l’integrazione fornisce una famiglia e i dati ne selezionano un elemento.

3. Il teorema fondamentale e il calcolo mediante una primitiva

Per una funzione continua f su un intervallo contenente a e b, qualsiasi primitiva F permette di calcolare $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Aggiungere una costante a F non modifica questa differenza. Il valore nell'estremo inferiore viene sottratto dopo aver valutato la primitiva; parentesi scorrette possono invertire il risultato.

La funzione $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f quando valgono le ipotesi di continuità. La variabile t sotto il segno di integrale è una variabile d'integrazione; qui x rappresenta l'estremo superiore variabile. Questa distinzione evita di scrivere la stessa lettera in diversi ruoli senza sapere che cosa vari. L'integrale collega così l'area accumulata alla derivazione.

Per $f(x) = 3x^2 - 2$ su [1; 2], una primitiva è $F(x) = x^3 - 2x$. L'integrale è $(8 - 4) - (1 - 2) = 5$. La funzione è positiva su questo intervallo, il che rende coerente un risultato positivo. Il controllo del segno è indipendente dal calcolo delle parentesi e può rivelare un errore prima della risposta finale.

4. Area orientata e area geometrica

Prendiamo $f(x) = x - 1$ su [0; 3]. Una primitiva è $x^2/2 - x$. L'integrale è 3/2. Tuttavia, la regione fra curva e asse presenta una parte negativa fra 0 e 1 e una positiva fra 1 e 3. L'area geometrica totale è la somma delle due aree positive: 1/2 + 2 = 5/2.

Per calcolare quest'area, si integra |f| oppure si suddivide il dominio nei cambiamenti di segno. La formula ∫f dà la differenza fra contributi positivi e negativi. Un integrale nullo non implica quindi una funzione nulla: i contributi possono compensarsi. Per esempio, $\int_{(-1)}^1 x\,dx = 0$, anche se il grafico possiede due regioni non nulle.

Per l’area fra due curve f e g, si integra |f − g|. Se è noto f ≥ g sull’intero intervallo, l’area è ∫(f − g). Le intersezioni possono richiedere diverse parti. Scegliere la curva «superiore» da un solo punto senza studiare il segno può produrre un’area negativa o una compensazione non desiderata.

5. Proprietà dell’integrale

La linearità dà ∫(αf + βg) = α∫f + β∫g, con gli stessi estremi d’integrazione e ipotesi appropriate. La relazione di additività rispetto agli intervalli permette di suddividere: ∫_a^b f + ∫_b^c f = ∫_a^c f. Invertire gli estremi cambia il segno e l’integrale fra estremi uguali è zero. Queste regole organizzano un calcolo senza richiedere una nuova primitiva per ogni parte.

Se f ≥ 0 su [a; b] con a ≤ b, il suo integrale è non negativo. Se f ≤ g, allora ∫f ≤ ∫g. Una disuguaglianza punto per punto può quindi delimitare un’accumulazione. L’ordine degli estremi d’integrazione conta: i segni vengono invertiti quando cambia l’orientamento. Le proprietà vanno utilizzate con le rispettive convenzioni.

Se m ≤ f(x) ≤ M su [a; b], allora m(b − a) ≤ ∫_a^b f ≤ M(b − a). Questa delimitazione non è sempre molto precisa, ma fornisce un controllo immediato. Un valore calcolato fuori da questi limiti è incompatibile con i dati o con il calcolo. Per una funzione compresa fra 2 e 5 su un intervallo di lunghezza 3, l’integrale deve trovarsi fra 6 e 15.

6. Riconoscere una derivata composta al contrario

Per trovare le primitive è utile riconoscere la struttura. Se u è derivabile, una primitiva di u'e^u è e^u. Per u > 0, una primitiva di u'/u è ln(u). Una primitiva di u'cos(u) è sin(u). Il fattore u' è decisivo; la sola presenza di un’esponenziale, di un quoziente o di un coseno non basta.

Per f(x) = 2x/(x² + 1), riconosciamo u = x² + 1, sempre positivo, e u' = 2x. Una primitiva è ln(x² + 1). Per g(x) = 6x e^(3x²), una primitiva è e^(3x²). Se il numeratore del primo esempio fosse x, occorrerebbe un fattore 1/2. Il controllo mediante derivazione permette di ritrovare il coefficiente esatto.

Non inventate una primitiva «integrando separatamente» numeratore e denominatore di un quoziente. Analogamente, una primitiva di un prodotto non è il prodotto di due primitive. Le regole di derivazione spiegano perché queste scorciatoie siano false. Quando non si adatta alcuna struttura immediata, può essere necessario un altro metodo o un’approssimazione.

7. Integrazione per parti: utilizzare la derivata di un prodotto

La formula (uv)' = u'v + uv' dà, dopo integrazione, ∫_a^b u'v = [uv]_a^b − ∫_a^b uv'. Questa relazione di integrazione per parti trasforma un integrale in un altro. L’utilità dipende dalla scelta: cercate una derivata che semplifichi un fattore e una primitiva accessibile per l’altro. Nessuna scelta è automaticamente efficace per ogni prodotto.

Per ∫_0^1 xe^x dx, prendiamo v = x e u' = e^x, quindi u = e^x e v' = 1. L’integrale è [xe^x]_0^1 − ∫_0^1 e^x dx = e − (e − 1) = 1. Una primitiva equivalente è (x − 1)e^x, che può essere controllata mediante derivazione. Il risultato positivo è coerente con la funzione integranda positiva sull’intervallo.

Per ∫_1^e ln(x) dx, prendiamo v = ln(x) e u' = 1, quindi u = x e v' = 1/x. Si ottiene [xln(x)]_1^e − ∫_1^e 1 dx = e − (e − 1) = 1. Scrivere una primitiva xln(x) senza il termine −x dimenticherebbe parte della sua derivata. Il metodo si comprende attraverso la regola del prodotto, non mediante una ricetta di scelta memorizzata senza giustificazione.

8. Il valore medio di una funzione

Il valore medio di f su [a; b], con a < b, è μ = [1/(b − a)]∫_a^b f(x) dx. Ha la stessa unità di f. Corrisponde all'altezza di un rettangolo con la stessa larghezza e la stessa area orientata dell'integrale. La media di alcuni valori campionati non coincide automaticamente con questo valore; dipende dal campionamento e dall'approssimazione utilizzata.

Per f(x) = x² su [0; 2], l'integrale è 8/3 e la media 4/3. La media dei soli valori agli estremi, (0 + 4)/2 = 2, è differente. Se f è continua, il valore medio viene assunto almeno in un punto dell'intervallo; qui x = 2/sqrt(3) è adatto. Questa proprietà non fornisce sempre un punto unico.

In un modello di potenza P(t) = 3t + 2 su [0; 4] secondi, con unità appropriate per i coefficienti, l'energia è ∫P dt = 32 J e la potenza media è 8 W. Per questa funzione affine, anche la media dei valori iniziale e finale dà 8 W. L'uguaglianza discende dalla struttura affine; non va generalizzata a ogni curva.

9. Rettangoli e delimitazioni numeriche

Dividiamo [0; 1] in quattro intervalli di ampiezza 1/4 per la funzione crescente f(x) = x². I rettangoli che utilizzano i valori agli estremi sinistri sottostimano l'area; quelli che utilizzano gli estremi destri la sovrastimano. La somma sinistra è (1/4)[0² + (1/4)² + (1/2)² + (3/4)²] = 0,21875. La somma destra è 0,46875. L'integrale esatto 1/3 si trova fra le due.

Aumentare il numero delle suddivisioni restringe queste delimitazioni per una funzione continua in questo quadro. Un metodo numerico deve dichiarare numero e ampiezza degli intervalli e scelta dei punti. Una lista di risultati senza metodo non permette di valutare la precisione. Se la funzione non è monotona, la sola scelta di punti sinistri o destri non garantisce una

delimitazione; occorre studiare gli estremi su ogni parte o usare altri argomenti.

Il metodo dei trapezi utilizza i segmenti che uniscono i valori agli estremi. Per questo esempio convesso, sovrastima l'area e dà 0,34375 con quattro parti. Il metodo del punto medio dà 0,328125, una sottostima in questo caso. La posizione delle corde e la convessità spiegano il verso di queste differenze. Senza tale informazione, questi metodi forniscono approssimazioni, ma non necessariamente delimitazioni certificate.

10. Una successione di integrali e una relazione di ricorrenza

Definiamo I_n = ∫_0^1 x^n e^x dx per n ≥ 0. Le funzioni integrande sono positive all'interno, quindi I_n > 0. Poiché 0 ≤ x ≤ 1, x^(n+1) ≤ x^n, quindi I_(n+1) ≤ I_n. La successione è decrescente e limitata inferiormente da zero; converge. Per identificarne il limite, usiamo e^x ≤ e: I_n ≤ e∫_0^1 x^n dx = e/(n + 1), che tende a zero. Le delimitazioni danno quindi I_n → 0.

L'integrazione per parti per n ≥ 1 dà I_n = [x^n e^x]_0^1 − n∫_0^1 x^(n−1)e^x dx = e − nI_(n−1). Il primo termine è I_0 = e − 1; si ritrova I_1 = 1. Il caso n = 0 va trattato separatamente perché l'espressione al bordo in zero e la potenza n − 1 cambiano il proprio stato.

Questa relazione è esatta ma può essere difficile numericamente per n grande, perché sottrae quantità vicine e amplifica alcuni errori di arrotondamento. Una formula di ricorrenza corretta non è automaticamente il miglior algoritmo in virgola mobile. Le delimitazioni teoriche forniscono qui un controllo prezioso: un risultato negativo sarebbe impossibile per questi integrali positivi.

11. Esercizi con soluzioni

A - Primitiva ed estremo. Calcolate $\int_0^2 (4x + 1)\,dx$. **Soluzione:** una primitiva è $2x^2 + x$, quindi l'integrale è 10. La funzione è positiva su questo intervallo; un risultato negativo indicherebbe un errore nei segni o negli estremi d'integrazione.

B - Area fra curve. Confrontate x e x^2 su $[0; 1]$, poi calcolate l'area fra i grafici. **Soluzione:** $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$. L'area è $\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$. L'ordine delle funzioni viene stabilito prima dell'integrazione.

C - Prodotto. Calcolate $\int_0^1 xe^{(2x)}\,dx$. **Soluzione:** l'integrazione per parti dà $[xe^{(2x)/2}]_0^1 - (1/2)\int_0^1 e^{(2x)}\,dx = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (e^2 + 1)/4$. Il fattore 1/2 compare due volte e va conservato.

D - Spostamento. Una velocità è $v(t) = 2 - t$ su $[0; 4]$. **Soluzione:** il suo integrale è $[2t - t^2/2]_0^4 = 0$. La distanza non è nulla: è $2 + 2 = 4$ nell'unità di lunghezza, separando le fasi prima e dopo $t = 2$. L'integrale della velocità con segno dà lo spostamento.

E - Delimitazioni. Una funzione soddisfa $1 \leq f \leq 3$ su $[2; 5]$. **Soluzione:** $3 \leq \int_2^5 f \leq 9$ e il valore medio si trova fra 1 e 3. Queste delimitazioni non determinano un valore unico; stabiliscono ciò che è compatibile con le sole limitazioni date.

12. Ripasso e riferimenti

Ripassate un integrale attraverso significato, unità, segno e metodo di calcolo. Controllate una primitiva mediante derivazione. Per un'area geometrica, esaminate i cambiamenti di segno; per un'approssimazione, dichiarate le ipotesi che la rendono una delimitazione o soltanto una stima. Conservate le costanti e i fattori delle funzioni composte fino al controllo finale.

Il quadro ufficiale pubblicato della Terminale comprende primitive, integrali, valori medi e integrazione per parti: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e l’allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l’11 ottobre 2026. Dimostrazioni, situazioni ed esercizi di questo capitolo sono testi originali LFDP. Non vengono riprodotti testi di un documento di programma o di un manuale, né prove d’esame di terzi.

Capitolo 9 - Equazioni differenziali: collegare un’evoluzione al suo tasso di variazione

Prospettiva storica - Euler: trovare funzioni a partire da relazioni

Euler pubblica il suo trattato in tre volumi sul calcolo integrale fra il 1768 e il 1770; vi studia anche le equazioni differenziali. Questa tappa ricorda che l’incognita può essere una funzione intera invece di un numero isolato. In questo capitolo, una relazione fra una funzione e la sua derivata viene accompagnata da una condizione iniziale, poi esaminata attraverso un’interpretazione e un’approssimazione numerica. L’archivio istituzionale data il primo volume al 1768; il file fornito è una terza edizione pubblicata nel 1824, distinzione da conservare quando si consulta il documento storico.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/ ; University of the Pacific - Euler Archive : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/342/

1. Un’equazione la cui incognita è una funzione

Un’equazione differenziale collega una funzione incognita a una o più derivate. Risolvere $y' = 2y$ non significa trovare un solo numero y: si cercano tutte le funzioni derivabili che soddisfano questa relazione su un intervallo. Una condizione iniziale, come $y(0) = 3$, seleziona poi una soluzione da una famiglia. La distinzione fra relazione di evoluzione e stato iniziale è importante quanto nelle successioni.

Le variabili devono essere nominate. Se t rappresenta il tempo, $y(t)$ può rappresentare una temperatura, una concentrazione

immaginaria o una quantità astratta. Il coefficiente che moltiplica y in y' = ay ha un'unità inversa del tempo se y conserva la stessa unità. Un termine b in y' = ay + b ha l'unità di y per unità di tempo. Un'equazione può essere algebricamente corretta e fisicamente incoerente quando le unità non corrispondono.

Il capitolo affronta principalmente le equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti. Gli approfondimenti mostrano perché questo modello non copra ogni tipo di evoluzione. Le situazioni sono costruite per apprendere; non prevedono rendimenti, evoluzioni della salute o fenomeni reali senza convalidare ipotesi e parametri.

2. Risolvere y' = ay e giustificare l'intera famiglia

La funzione y(t) = Ce^(at) soddisfa y' = aCe^(at) = ay per ogni costante C. Per mostrare che tutte le soluzioni abbiano questa forma, prendiamo una soluzione y e definiamo z(t) = y(t)e^(−at). Con la regola del prodotto, z' = y'e^(−at) − aye^(−at) = 0. Su un intervallo, z è dunque costante e y = Ce^(at). Questa dimostrazione stabilisce l'intera famiglia, non soltanto alcuni esempi di soluzione.

Se y(t_0) = y_0, allora C = y_0e^(−at_0), quindi y(t) = y_0e^[a(t − t_0)]. La forma con t − t_0 conserva chiaramente l'origine della condizione iniziale. Per a = 0, si ritrovano soluzioni costanti. Per y_0 = 0, la soluzione è identicamente nulla qualunque sia a. Il segno di y_0 si conserva perché l'esponenziale è positiva.

Se a > 0 e y_0 > 0, la funzione cresce e diverge a lungo termine nel modello. Se a < 0 e y_0 > 0, decresce verso zero. Un a negativo significa una diminuzione relativa proporzionale al valore corrente, non una diminuzione fissa a ogni unità di tempo. Quest'ultima sarebbe descritta da y' = b con b costante.

3. Un termine costante e un valore di equilibrio

Per y' = ay + b con a ≠ 0, cerchiamo una soluzione costante L. Deve soddisfare 0 = aL + b, quindi L = −b/a. Porre z = y − L dà z' = az. Le soluzioni sono dunque y(t) = L + Ce^(at). Il cambiamento di variabile misura la distanza dall'equilibrio e trasforma l'equazione in un caso già risolto.

Con y(t_0) = y_0, la soluzione diventa y(t) = L + (y_0 − L)e^[a(t − t_0)]. Verificate la condizione iniziale, poi l'equazione mediante derivazione. Se a < 0, la distanza da L tende a zero. Una soluzione può salire verso L o scendere verso L secondo il segno di y_0 − L. Lo stesso modello non fissa un verso di variazione indipendentemente dallo stato iniziale.

Se a > 0, uno scarto iniziale non nullo aumenta in valore assoluto; la soluzione costante y = L esiste comunque. Sarebbe quindi sbagliato affermare che tutte le soluzioni divergano per a > 0. Per a = 0, la trasformazione precedente non è consentita; l'equazione è y' = b e le soluzioni sono y(t) = bt + C. Separare questo caso evita una divisione per zero.

4. Un'equazione con una condizione in un altro istante

Risolviamo y' + 3y = 9 con y(1) = 4. L'equazione equivale a y' = −3y + 9, quindi L = 3 e y(t) = 3 + Ce^(−3t). La condizione dà 4 = 3 + Ce^−3, quindi C = e³. Un'espressione più chiara è y(t) = 3 + e^[−3(t − 1)]. In t = 1, il fattore esponenziale vale uno e il valore è effettivamente quattro.

L'equazione e la condizione non richiedono necessariamente un'origine in t = 0. Un errore comune consiste nel prendere C = 4 perché è stato memorizzato il caso y(0) = y_0 per y' = ay. Qui il termine di equilibrio e l'istante iniziale modificano la costante. Il controllo nel punto specificato è breve e individua immediatamente questo errore.

La soluzione resta superiore a 3 e decresce per $t \geq 1$. Il limite è 3. Il limite deriva dal segno del coefficiente nell'esponente, non soltanto dal fatto che l'equazione abbia una soluzione costante. Per un'equazione con $a > 0$, il valore costante sarebbe generalmente instabile rispetto a uno scarto iniziale. Esistenza dell'equilibrio e attrazione verso l'equilibrio sono proprietà diverse.

5. Raffreddamento: costruire il modello da un bilancio

Un oggetto immaginario di capacità termica C scambia energia con un ambiente mantenuto a T_ext. Una legge di potenza ricevuta $-H(T - T_{ext})$, con $H > 0$ costante, conduce a $C\,T' = -H(T - T_{ext})$. L'equazione si scrive $T' = -(1/\tau)(T - T_{ext})$, dove $\tau = C/H$ è un tempo caratteristico. La soluzione è $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{(-t/\tau)}$ quando lo stato iniziale è specificato in zero.

Per $T_0 = 70$ °C, $T_{ext} = 10$ °C e $\tau = 4$ min, si ottiene $T(t) = 10 + 60e^{(-t/4)}$, con t in minuti. Il modello si avvicina a 10 °C, non a zero. Per raggiungere al massimo 25 °C, lo scarto deve diventare al massimo 15: $e^{(-t/4)} \leq 1/4$, quindi $t \geq 4\ln(4) \approx 5{,}55$ min. Il logaritmo si applica a un rapporto adimensionale.

Questo calcolo non fornisce un protocollo di contatto con un oggetto caldo. L'ambiente reale può variare, la temperatura dell'oggetto può non essere uniforme e il coefficiente H può dipendere dalle condizioni. Il modello è utile quando queste approssimazioni sono accettabili per la domanda. L'equazione non diventa una convalida fisica soltanto perché la soluzione è matematicamente esatta.

6. Entrata, uscita e conservazione in un serbatoio immaginario

Un serbatoio ideale di volume costante V riceve e scarica la stessa portata volumetrica Q. Supponiamo una miscela istantaneamente omogenea e una concentrazione in ingresso costante c_in. Se M = Vc è la quantità di sostanza presente, il bilancio è M' = Qc_in − Qc. Con V costante, si ottiene c' = (Q/V)(c_in − c). La relazione deriva dai due flussi, non da una preferenza per un’esponenziale.

La concentrazione di equilibrio è c_in e il tempo caratteristico V/Q. Per V = 100 litri e Q = 5 litri al minuto, questo tempo è 20 min. Se la concentrazione iniziale è 3 g/L e quella in ingresso 1 g/L, la soluzione è c(t) = 1 + 2e^(−t/20). Dopo 20 min, vale circa 1,736 g/L. Il volume totale resta costante in questo modello, ma la quantità di sostanza cambia.

Se il flusso in ingresso non contiene la sostanza, c_in = 0 e c decresce esponenzialmente. Per c_0 = 5 g/L, la quantità iniziale in 100 litri è 500 g; dopo una costante di tempo, vale circa 184 g. Sono valori di esercizio, non dosi, trattamenti o raccomandazioni per utilizzare un fluido. Una miscela non omogenea o un volume variabile richiederebbero un’altra equazione.

7. Modelli lineari, esponenziali e con saturazione

Una crescita costante y' = b dà un’evoluzione affine. Una crescita proporzionale y' = ry dà un’esponenziale. Le due possono essere vicine su un breve intervallo e molto differenti a lungo termine. La scelta richiede ipotesi e osservazioni. Adattare due punti non determina sempre quale regola resterà pertinente oltre quei punti.

Come approfondimento, un’equazione non lineare y' = ry(1 − y/K), con r > 0 e K > 0, modella una crescita ridotta quando ci si avvicina a una capacità K. Per 0 < y_0 < K, una soluzione è y(t) = K/[1 + A e^(−rt)], con A = K/y_0 − 1. La si può verificare mediante

derivazione. Le soluzioni costanti zero e K vanno esaminate separatamente; la formula di A non è definita per y_0 = 0.

Questo esempio aggiuntivo non è un modello universale di popolazione. Il parametro K può essere artificiale o variabile in una situazione reale e altri effetti possono dominare. Mostra che un'esponenziale illimitata non è l'unica struttura matematica possibile. I modelli concorrenti si giudicano attraverso ipotesi e previsioni, non dall'aspetto più rassicurante di una curva.

8. Il metodo di Euler: un'approssimazione discreta

Per y' = f(t,y), il metodo esplicito di Euler usa y_(n+1) = y_n + h f(t_n,y_n), con t_(n+1) = t_n + h. Sostituisce l'evoluzione su un piccolo intervallo con la variazione locale specificata all'inizio. Il passo h deve avere l'unità del tempo. I valori calcolati approssimano la soluzione; generalmente non sono i valori esatti agli stessi istanti.

Per y' = −ky con k > 0, Euler dà y_(n+1) = (1 − kh)y_n. Su un passo, la soluzione esatta moltiplica y per e^(−kh), che è sempre positivo. Se 0 < kh ≤ 1, il fattore di Euler resta non negativo e produce una diminuzione da uno stato iniziale positivo. Se 1 < kh < 2, i valori alternano il segno diminuendo in valore assoluto. Se kh > 2, possono crescere in valore assoluto anche se la soluzione continua decresce.

Con k = 1 e h = 3 in unità compatibili, il fattore numerico è −2: il metodo diverge per y_0 ≠ 0. Questo fallimento non confuta la soluzione esatta e^−t; dimostra un passo inadatto e un limite dell'algoritmo. Ridurre il passo può migliorare un'approssimazione, ma occorre ancora esaminare regolarità, durata ed errori accumulati. Un programma che funziona senza errori informatici non è necessariamente una simulazione matematicamente affidabile.

9. Identificare un parametro e controllare indipendentemente

Se l’equilibrio L è conosciuto e si suppone che le osservazioni seguano y(t) = L + Ce^(at), due valori i cui scarti da L siano non nulli e dello stesso segno permettono di stimare a mediante ln[(y(t_2) − L)/(y(t_1) − L)]/(t_2 − t_1). Servono un rapporto positivo e due istanti distinti. Il coefficiente stimato dipende dal modello dichiarato.

Per dati immaginari L = 2, y(0) = 10 e y(4) = 6, il rapporto degli scarti è 4/8 = 1/2, quindi a = −ln(2)/4. Il modello prevede poi y(8) = 4. Una misura indipendente in quell’istante potrebbe mettere alla prova la previsione. Ritrovare i due valori utilizzati per adattare il modello non è una prova indipendente: controlla la costruzione.

Se anche L è sconosciuto, due osservazioni non determinano necessariamente i tre parametri L, C e a. Le incertezze e l’intervallo di osservazione possono inoltre rendere fragile una stima. Risolvere un’equazione differenziale, adattarne i parametri e convalidare il modello sono tre tappe separate. Una curva calcolata attraente non ne sostituisce nessuna.

10. Uno sguardo al secondo ordine

Un’equazione y'' + ω²y = 0, con ω > 0, compare in un oscillatore ideale. Le funzioni A cos(ωt) + B sin(ωt) la soddisfano, come mostrano due derivazioni. Con y(0) = y_0 e y'(0) = v_0, si ottiene A = y_0 e B = v_0/ω. Servono due condizioni per determinare queste due costanti. Questo esempio aggiuntivo illumina il collegamento fra trigonometria ed evoluzione dinamica.

Il periodo è 2π/ω. Il modello non comprende né dissipazione né una forza di mantenimento; un’oscillazione reale può quindi richiedere altri termini. Non risolvete questa equazione come se fosse y' = ay:

ordine e tipo della relazione differiscono. Individuare l’equazione precede la scelta del metodo.

Il capitolo principale resta concentrato sulle equazioni lineari del primo ordine a coefficienti costanti. L’oscillatore e la crescita con saturazione sono approfondimenti esplicitamente distinti, utili per comprendere i limiti di una famiglia di modelli. Non sono presentati come annunci di argomenti o requisiti di una sessione d’esame.

11. Esercizi con soluzioni

A - Famiglia completa. Risolvete y' = −2y e imponete y(0) = 5. **Soluzione:** le soluzioni sono Ce^(−2t); la condizione dà C = 5. La soluzione è positiva e decresce verso zero. Verificare derivata e valore iniziale controlla la funzione ottenuta, mentre la dimostrazione della famiglia garantisce che nessun’altra soluzione sia stata dimenticata in questo quadro.

B - Equilibrio. y' = 2y − 6, y(0) = 4. **Soluzione:** L = 3 e y(t) = 3 + e^(2t). L’equilibrio esiste ma questa soluzione se ne allontana. Con y(0) = 3, sarebbe costante; con y(0) = 2, sarebbe 3 − e^(2t), che può diventare negativa. Se y dovesse rappresentare una quantità non negativa, quella fase successiva indicherebbe un limite del modello fisico.

C - Termine costante. y' = −4 e y(0) = 7. **Soluzione:** y(t) = 7 − 4t. Non è un’esponenziale. Il valore diventa zero in t = 7/4. Un dominio fisico che richieda y ≥ 0 dovrebbe fermarsi o cambiare oltre questa soglia.

D - Soluzione proposta. La funzione y = e^(2t) soddisfa y' = 2y + 1? **Soluzione:** la derivata è 2e^(2t), mentre il membro destro è 2e^(2t) + 1. La differenza costante mostra che la proposta è inadatta, indipendentemente dalla condizione iniziale.

E - Passo numerico. Per y' = −y, y_0 = 1 e h = 0,5, calcolate il primo passo di Euler e confrontatelo con il valore esatto. **Soluzione:** Euler dà 0,5; la soluzione esatta dà e^−0,5 ≈ 0,6065. La differenza è circa 0,1065. Il passo numerico descrive un’approssimazione, non un’altra soluzione esatta della stessa equazione.

12. Ripasso e riferimenti

Per ripassare, stabilite la famiglia, utilizzate la condizione iniziale, poi controllate mediante derivazione. Studiate equilibrio, segno e limite senza dedurli meccanicamente dal solo nome dell’equazione. Per un modello, dichiarate gli scambi e le unità. Per una simulazione, distinguete soluzione esatta e approssimazione e controllate un invariante o una limitazione indipendenti.

Quadro ufficiale pubblicato della Terminale: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm e l’allegato https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultati l’11 ottobre 2026. Sviluppi, esempi ed esercizi sono testi originali LFDP. I modelli di raffreddamento e di serbatoio sono didattici e non forniscono protocolli di manipolazione, diagnosi, dosaggi o previsioni di una situazione reale.

Capitolo 10 - Calcolo combinatorio, probabilità e distribuzione binomiale

Prospettiva storica - Pascal: una disposizione rivela una struttura

La BnF registra una pubblicazione del 1665 del Traité du triangle arithmétique di Blaise Pascal, successiva alla sua morte. Questa prospettiva accompagna la lettura dei coefficienti binomiali: una disposizione di numeri può aiutare a riconoscere una relazione, poi una dimostrazione spiega perché valga. In questo capitolo separiamo costruzione del triangolo, conteggio e applicazioni probabilistiche. Associare il triangolo al nome di Pascal non afferma che egli sia stato il primo a conoscere questa disposizione; individua un'opera storica specifica invece di un'origine unica per tutte le idee del capitolo.

Fonte storica: Bibliothèque nationale de France - Catalogue collectif de France : https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/ark:/16871/00114268519

1. Un modello probabilistico deve partire dai suoi esiti

Un calcolo di probabilità descrive un modello di un'esperienza, non l'incertezza in generale. Definite lo spazio campionario degli esiti possibili, gli eventi e una regola di assegnazione delle probabilità. In uno spazio campionario finito, le probabilità elementari sono non negative e la loro somma è uno. Un evento è un insieme di esiti; la sua probabilità è la somma delle probabilità assegnate a essi.

La parola «casuale» non garantisce probabilità uguali. Una moneta può essere truccata; un'estrazione dipende dal meccanismo; un campione può essere selezionato con distorsioni. La formula «casi favorevoli diviso casi possibili» è giustificata quando gli esiti

conteggiati sono equiprobabili. Diventa fuorviante quando si contano categorie che raggruppano numeri diversi di esiti.

Per due lanci di un dado equilibrato, le trentasei coppie ordinate sono equiprobabili. Le somme possibili vanno da due a dodici, ma questi undici valori non sono equiprobabili: una sola coppia dà due, mentre sei danno sette. Cambiare la rappresentazione dell’esperienza non conserva quindi automaticamente una distribuzione uniforme sulle nuove categorie.

La probabilità teorica va distinta dalla frequenza osservata. Una frequenza è il numero di occorrenze diviso per il numero di prove effettuate. È un valore osservato che può variare da una serie all’altra. Una probabilità è un parametro del modello. La loro relazione verrà giustificata sotto ipotesi di ripetizione, non attraverso un’identificazione immediata.

2. Contare senza ripetizioni o doppi conteggi

Se una prima decisione offre a possibilità e una seconda ne offre b per ciascuna, ci sono a b coppie di scelte. Questo principio suppone che la seconda tappa offra effettivamente b possibilità per ogni prima decisione. Quando il numero varia, vanno sommati i contributi corrispondenti. Un albero mostra questa distinzione invece di applicare meccanicamente un prodotto.

Per formare un codice di quattro caratteri con dieci scelte possibili a ogni posizione e ripetizione consentita, si ottengono 10^4 codici. Se i caratteri devono essere distinti, le scelte successive sono dieci, nove, otto e sette: si ottengono 5 040 codici. Il cambiamento di condizione modifica il conteggio anche se la lunghezza del codice resta la stessa.

L’ordine conta in un codice o su un podio. Scegliere tre persone fra cinque per occupare tre posizioni successive dà $5 \times 4 \times 3 = 60$ possibilità. Scegliere un gruppo di tre fra le stesse cinque, senza

ruoli distinti, dà soltanto dieci gruppi. Ogni gruppo è stato conteggiato 3! = 6 volte fra le liste ordinate, quindi 60/6 = 10.

Per n oggetti distinti, il numero di permutazioni è n!. Si definisce 0! = 1, convenzione coerente con diverse identità. Il numero di sottoinsiemi di k elementi scelti fra n è il coefficiente binomiale:

C(n,k) = n! / [k! (n − k)!], per 0 ≤ k ≤ n.

La formula esprime precisamente l’eliminazione dell’ordine. Si ha anche C(n,k) = C(n,n − k): scegliere gli elementi conservati equivale a scegliere il loro complemento. Questa simmetria fornisce un controllo e semplifica alcuni calcoli.

Per n ≥ 2 e 1 ≤ k ≤ n − 1, la relazione di Pascal, C(n,k) = C(n − 1,k − 1) + C(n − 1,k), si dimostra separando i gruppi che contengono un oggetto fissato da quelli che non lo contengono. La dimostrazione dà significato a entrambi i termini; è più utile di un’identità fra fattoriali appresa senza interpretazione.

3. Unione, intersezione e complemento

Il complemento di A, scritto non A oppure A^c, contiene ogni esito che non appartiene ad A. La sua probabilità è 1 − P(A). Questa relazione è particolarmente efficace per «almeno uno», calcolando prima «nessuno» quando quest’ultimo evento ha una descrizione più semplice.

L’intersezione A ∩ B significa che si verificano entrambi gli eventi. L’unione A ∪ B significa che se ne verifica almeno uno, eventualmente entrambi. La formula generale è P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B). La sottrazione elimina il doppio conteggio dell’intersezione. Se gli eventi sono incompatibili, l’intersezione è vuota e questo contributo è nullo.

Incompatibilità e indipendenza sono concetti diversi. Due eventi incompatibili con probabilità strettamente positive non sono

indipendenti: il verificarsi dell'uno esclude l'altro. Viceversa, eventi indipendenti possono verificarsi insieme. Un risultato pari del dado e un risultato almeno uguale a quattro possono condividere esiti senza essere automaticamente indipendenti; la loro relazione si calcola nel modello.

Un diagramma di due insiemi può aiutare a spiegare le operazioni, ma non fornisce una misura affidabile delle probabilità se le aree non sono state costruite a questo scopo. I diagrammi organizzano il ragionamento; dati e distribuzione forniscono il calcolo.

4. Probabilità condizionata: cambiare la popolazione di riferimento

Quando P(A) è strettamente positiva, la probabilità di B dato A è definita da P(B|A) = P(A ∩ B)/P(A). Il denominatore corrisponde all'evento che diventa il riferimento. Si può riscrivere P(A ∩ B) = P(A) P(B|A). Questa relazione calcola un ramo di un albero senza assumere l'indipendenza.

In una popolazione immaginaria di lotti, il 40% proviene dall'officina A e il 60% dall'officina B. La probabilità che un lotto soddisfi un criterio dichiarato è del 90% all'interno di A e del 60% all'interno di B. L'evento R indica il soddisfacimento del criterio. Le probabilità congiunte sono P(A ∩ R) = 0,40 × 0,90 = 0,36 e P(B ∩ R) = 0,60 × 0,60 = 0,36.

Poiché le due officine formano una partizione della popolazione, P(R) = 0,72. Fra i lotti che soddisfano il criterio, la probabilità di provenire da A è 0,36/0,72 = 0,50. Non è né 0,40 né 0,90. Il calcolo ha cambiato la popolazione di riferimento: non consideriamo più tutti i lotti, ma soltanto quelli che soddisfano il criterio.

Questo esempio mostra perché P(R|A) e P(A|R) non siano intercambiabili. La prima descrive i risultati all'interno dell'officina; la seconda le provenienze fra i risultati conservati. Gli stessi eventi

compaiono in entrambe le espressioni, ma i denominatori differiscono.

Una tabella a doppia entrata fornisce un’altra rappresentazione. Fra mille lotti immaginari che rispettano le proporzioni del modello, 400 provengono da A e 600 da B; 360 in ciascun gruppo soddisfano il criterio. Dei 720 lotti conservati, metà proviene da A. La tabella può rendere il condizionamento più concreto dei simboli, senza sostituire la definizione.

5. Probabilità totali ed effetto dei tassi di base

Una partizione è una famiglia di eventi incompatibili che coprono lo spazio campionario. Per una partizione A_1, …, A_m con probabilità positive, P(B) è la somma dei P(A_i) P(B|A_i). Si sommano i contributi appartenenti a gruppi distinti. La formula non richiede che B sia indipendente dai gruppi.

Un dispositivo di controllo immaginario segnala il 95% dei pezzi difettosi e segnala anche il 5% dei pezzi non difettosi. Il modello suppone che l’1% dei pezzi sia difettoso. Fra diecimila pezzi teorici, ce ne sono cento difettosi, novantacinque dei quali vengono segnalati, e novemilanovecento non difettosi, quattrocentonovantacinque dei quali vengono segnalati. Il numero totale di segnalati è quindi cinquecentonovanta.

La probabilità che un pezzo segnalato sia effettivamente difettoso è 95/590, circa il 16,1%. Un’elevata proporzione di pezzi difettosi individuati non significa quindi che ogni segnalazione sia affidabile. Il tasso di base dei difetti e le false segnalazioni contribuiscono al risultato. L’esempio non riguarda alcuna decisione medica: illustra soltanto un ragionamento condizionato in una produzione immaginaria.

Lo stesso dispositivo applicato a una popolazione in cui i difetti siano molto più frequenti produrrebbe una probabilità condizionata

diversa dopo una segnalazione. Sarebbe quindi sbagliato presentare il risultato come una proprietà isolata del dispositivo. Questa prudenza diventa essenziale quando si comunica una percentuale senza descrivere la popolazione iniziale.

6. Indipendenza: un’ipotesi che permette un prodotto

Due eventi A e B sono indipendenti quando $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Se $P(A)$ è positiva, questa condizione equivale a $P(B|A) = P(B)$. Sapere che A si è verificato non modifica allora la probabilità di B nel modello. L’indipendenza esprime una struttura probabilistica, non l’assenza di vicinanza spaziale o una generale assenza di cause comuni.

Due lanci successivi di una moneta vengono spesso modellizzati come indipendenti con una probabilità di successo costante. Anche estrazioni con reinserimento possono essere indipendenti se mescolamento e meccanismo sono appropriati. Generalmente non lo sono le estrazioni senza reinserimento da una piccola urna: la composizione rimanente cambia dopo la prima estrazione.

Un’urna contiene tre palline rosse e due blu. Senza reinserimento, $P(\text{rosso alla prima estrazione}) = 3/5$ e la probabilità di rosso alla seconda dato rosso alla prima è $2/4$. La probabilità di due rosse è quindi $3/10$. Con reinserimento e mescolamento coerenti con il modello, sarebbe $(3/5)^2 = 9/25$. Sono esperienze differenti, non calcoli alternativi per la stessa procedura.

Per diverse prove, usate l’indipendenza congiunta appropriata alla sequenza considerata. Verificare le relazioni a due a due non basta generalmente a stabilire l’intera struttura d’indipendenza di una famiglia. Negli esercizi sulle prove di Bernoulli, l’indipendenza di tutte le prove è un’ipotesi dichiarata del modello; va menzionata prima di moltiplicare.

7. Una variabile aleatoria conta ciò che viene studiato

Una variabile aleatoria assegna un numero a ogni esito. Esiti differenti possono produrre lo stesso valore. La sua distribuzione precisa i valori possibili e le probabilità. La sua speranza matematica è la media di tali valori ponderata dalle probabilità, non un valore che l'esperienza debba necessariamente produrre.

Una variabile di Bernoulli vale uno in caso di successo e zero altrimenti, con probabilità di successo p. La sua speranza è p. Poiché il suo quadrato coincide con essa stessa, la varianza è $p - p^2 = p(1 - p)$. La parola successo è una convenzione di conteggio: può indicare un difetto, un fallimento o un evento indesiderato senza giudizio di valore.

Per una variabile X, la varianza si scrive $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$. Misura la dispersione quadratica attorno alla speranza. La deviazione standard è la sua radice quadrata e ha la stessa unità di X. Varianza in secondi al quadrato e deviazione standard in secondi non sono intercambiabili.

La linearità $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ non richiede l'indipendenza. Invece, sommare le varianze di due variabili richiede condizioni, in particolare l'indipendenza nel quadro qui studiato. Se Y = X, la varianza di X + Y è 4 V(X), non 2 V(X). Questo controesempio mostra perché la condizione non possa essere eliminata.

8. Costruire la distribuzione binomiale invece di indovinarla

Uno schema di Bernoulli ripete n prove indipendenti, ciascuna con due esiti e la stessa probabilità di successo p. La variabile X conta i successi. Segue allora una distribuzione binomiale di parametri n e p. Verificate i quattro elementi - ripetizione, due categorie, probabilità costante e indipendenza - prima di scegliere questa distribuzione.

Per una sequenza specifica contenente k successi e n − k insuccessi, la probabilità è p^k (1 − p)^(n − k). Esistono C(n,k) sequenze che danno esattamente k successi, perché occorre scegliere le posizioni dei successi. Queste sequenze sono incompatibili, quindi si sommano le loro probabilità identiche:

P(X = k) = C(n,k) p^k (1 − p)^(n − k).

Il coefficiente binomiale non è un fattore misterioso aggiunto a una potenza. Tiene conto del fatto che lo stesso numero di successi può comparire in ordini diversi. Per n = 3 e k = 2, successo-successo-insuccesso, successo-insuccesso-successo e insuccesso-successo-successo sono sequenze distinte, da cui il fattore tre.

La formula si estende naturalmente a p = 0 o p = 1 attraverso le corrispondenti distribuzioni certe, invece di manipolazioni ambigue di 0^0. Quando p = 0, X è sempre zero; quando p = 1, X è sempre n. Questi casi limite forniscono un controllo concettuale della distribuzione.

9. Speranza, varianza e portata delle medie

Scriviamo X come somma di n variabili di Bernoulli indipendenti X_1, …, X_n. Per linearità, E(X) = n p. Sommando le varianze indipendenti, V(X) = n p(1 − p). La deviazione standard è √[n p(1 − p)]. Questi risultati riguardano il numero di successi, non una frequenza; la frequenza X/n ha una varianza differente.

In quindici prove indipendenti con p = 0,80, il numero atteso di successi è dodici e la varianza 2,4. La deviazione standard è circa 1,55. Non significa che ogni serie produca dodici successi o che ogni risultato si trovi fra dodici meno 1,55 e dodici più 1,55. Speranza e deviazione standard riassumono la distribuzione senza sostituire le probabilità degli eventi specifici.

Una speranza può essere non intera anche quando X assume sempre valori interi. Con tre prove di probabilità 0,50, la speranza è di 1,5 successi. Nessuna esperienza osserva un successo e mezzo; il numero descrive una media teorica. Distinguere un valore possibile da una media evita di arrotondare una speranza e trattarla come un risultato garantito.

Se la probabilità p dipende dalla prova, il numero totale di successi generalmente non segue più la distribuzione binomiale classica, anche sotto indipendenza. La sua speranza può ancora essere trovata sommando le probabilità individuali. Per la distribuzione o la varianza serve allora un altro metodo. Un modello leggermente più complicato può essere più fedele di una distribuzione binomiale scelta per abitudine.

10. Calcolare eventi e risolvere un problema di soglia

Per dieci prove indipendenti con p = 0,20, la probabilità di due successi è C(10,2) × 0,20² × 0,80⁸, circa 0,302. La probabilità di almeno un successo è 1 − 0,80¹⁰, circa 0,893. La seconda domanda si tratta più facilmente attraverso il complemento; sommare dieci termini della distribuzione sarebbe possibile ma inutilmente lungo.

Cerchiamo il numero minimo n di prove indipendenti con probabilità 0,20 tale che la probabilità di almeno un successo raggiunga il 95%. Occorre 1 − 0,80^n ≥ 0,95, quindi 0,80^n ≤ 0,05. Il logaritmo dà n ln 0,80 ≤ ln 0,05. Poiché ln 0,80 è negativo, la divisione inverte la disuguaglianza: n ≥ ln 0,05/ln 0,80, circa 13,43. Il più piccolo intero è quattordici.

Verificate i valori vicini: tredici prove danno circa il 94,5%, quattordici circa il 95,6%. Questo controllo conferma sia l’arrotondamento intero sia la minimalità. Una calcolatrice che

visualizza 13,43 non risponde direttamente a una domanda su un numero di prove.

Per una probabilità della forma P(X ≤ k), sommate i termini da zero a k inclusi. Per P(X > k), usate 1 − P(X ≤ k) se è comodo. Leggete precisamente l'inclusione della soglia: «più di cinque» non significa «almeno cinque». Molti errori sulla distribuzione binomiale derivano da questa traduzione, anche quando formula e parametri sono corretti.

11. Esercizi con soluzioni e interpretazione

Esercizio A. Formate un comitato di due persone fra sei, poi nominate un presidente fra le due. Esistono C(6,2) = 15 comitati e due scelte di presidente per ciascuno: trenta possibilità. In alternativa, scegliete prima il presidente, poi l'altro membro, ottenendo 6 × 5. Entrambi i metodi ritrovano trenta perché contano le stesse configurazioni.

Esercizio B. Un'urna contiene quattro palline rosse e una blu. Si effettuano due estrazioni senza reinserimento. La probabilità di ottenere esattamente una rossa è P(rossa poi blu) + P(blu poi rossa), ovvero (4/5)(1/4) + (1/5)(4/4) = 2/5. Utilizzare una distribuzione binomiale con p = 4/5 sarebbe inadatto perché la seconda probabilità condizionata cambia.

Esercizio C. Sei prove indipendenti hanno probabilità di successo 1/2. La probabilità di almeno cinque successi è [C(6,5) + C(6,6)]/2^6 = 7/64, circa il 10,9%. Il calcolo comprende cinque e sei. La simmetria della distribuzione dà la stessa probabilità per al massimo un successo, fornendo un controllo.

Esercizio D. Definite un punteggio Y = 3X − 2, dove X segue una distribuzione binomiale di parametri dieci e 0,20. La speranza è 3 × 2 − 2 = 4. La varianza è 9 × 1,6 = 14,4. Sottrarre due non

modifica la dispersione; moltiplicare per tre moltiplica la deviazione standard per tre e la varianza per nove.

Esercizio E. «Un evento ha probabilità dell’1%, quindi deve verificarsi una volta in cento prove.» Questa affermazione è falsa. Sotto indipendenza e probabilità costante, la probabilità di non osservarlo mai in cento prove è $0{,}99^{100}$, circa il 36,6%. Il numero atteso di occorrenze è effettivamente uno, ma non impone il risultato di ogni serie.

12. Ciò che una soluzione probabilistica deve rendere visibile

Una soluzione deve descrivere gli eventi prima di assegnare la notazione, dichiarare la procedura, giustificare il condizionamento e ricordare le ipotesi che permettono i prodotti. Deve presentare una probabilità fra zero e uno, o la percentuale corrispondente, poi interpretarla nella popolazione corretta. Speranza, frequenza e probabilità condizionata non possono essere sostituite l’una all’altra.

La precisione numerica deve essere adatta alla domanda. Per confrontare due probabilità vicine a una soglia, conservate abbastanza cifre fino alla conclusione. Per un’illustrazione generale, possono bastare tre cifre significative. In ogni caso, l’arrotondamento finale non deve nascondere il verso di una disuguaglianza o trasformare una stima in certezza.

Riferimento del quadro didattico

Il programma francese della specializzazione in matematica della Terminale fornisce il quadro per calcolo combinatorio, schemi di Bernoulli e somme di variabili. Dimostrazioni, situazioni immaginarie ed esercizi precedenti sono originali: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Capitolo 11 - Geometria dello spazio: vettori, piani e distanze

Prospettiva storica - Descartes: collegare una figura alle equazioni

La Géométrie accompagna il Discours de la méthode di Descartes nel 1637. La presentazione istituzionale della BnF evidenzia il suo approccio di trasformazione dei problemi geometrici in equazioni. Il collegamento con questo capitolo è il passaggio fra un oggetto geometrico e un'espressione algebrica: un vettore, una retta o un piano devono conservare il proprio significato quando se ne calcolano le coordinate. Questa prospettiva storica non significa che Descartes utilizzasse già l'intero formalismo vettoriale moderno in tre dimensioni. Aiuta a comprendere un metodo di rappresentazione senza sostituire una verifica geometrica del risultato.

Fonte storica: Bibliothèque nationale de France - presentazione istituzionale: https://www.bnf.fr/fr/mediatheque/les-equations-la-methode-de-descartes-pour-resoudre-les-problemes-geometriques

1. Guardare una figura senza chiederle di dimostrare

Una rappresentazione dello spazio su un foglio conserva alcune relazioni e ne deforma altre. Due segmenti disegnati paralleli possono rappresentare direzioni differenti; un angolo retto può non sembrare retto in prospettiva. La figura aiuta a organizzare punti, facce e ipotesi. Una dimostrazione si fonda su relazioni geometriche o algebriche stabilite, non sulla sola impressione visiva.

Un cubo disegnato in prospettiva, per esempio, invita a distinguere la diagonale di una faccia dalla diagonale del cubo. La prima si trova nel piano di una faccia; la seconda collega vertici opposti

attraverso lo spazio. In un cubo di spigolo a, le loro lunghezze sono rispettivamente $a\sqrt{2}$ e $a\sqrt{3}$. Il disegno non permette di confrontarle con un righello se la proiezione accorcia direzioni differenti in misure diverse.

La geometria analitica traduce le configurazioni in coordinate ed equazioni. Non elimina la geometria: fornisce un altro linguaggio per esprimere allineamento, parallelismo, ortogonalità o intersezione. Una soluzione completa deve tornare al significato spaziale dopo il calcolo. Un sistema senza soluzioni dice qualcosa sugli oggetti studiati; non è soltanto un risultato tecnico.

2. Punti, vettori e sistemi di riferimento: tre oggetti differenti

Un punto descrive una posizione. Un vettore descrive uno spostamento orientato, oppure una direzione con una grandezza. In un sistema di riferimento, le coordinate del vettore AB sono quelle di B meno quelle di A. Se $A = (1; 2; -1)$ e $B = (4; 0; 3)$, allora $AB = (3; -2; 4)$. Chiamare le sole coordinate di B «coordinate di AB» sarebbe sbagliato, salvo quando A è l’origine del riferimento.

Un vettore può essere rappresentato da segmenti orientati in luoghi differenti. L’uguaglianza di due vettori significa stessa direzione, stesso verso e stessa lunghezza, senza necessariamente gli stessi estremi. Questa distinzione permette di utilizzare i lati di un parallelogramma o di un cubo senza confondere spostamento e posizione assoluta.

Una base dello spazio è composta da tre vettori tali che ogni vettore possa essere espresso in modo unico come loro combinazione lineare. In un sistema di riferimento ortonormale, i vettori della base sono unitari e ortogonali a due a due. Le formule usuali delle coordinate per norma e prodotto scalare dipendono da

questa proprietà. Non si possono applicare senza modifiche a una base arbitraria.

Per esempio, se due vettori unitari della base formano un angolo di sessanta gradi, la norma della loro somma è $\sqrt{3}$, anziché $\sqrt{2}$. Le sole coordinate non bastano quindi a calcolare una lunghezza senza conoscere la geometria della base. Negli esercizi di questo capitolo, il riferimento è ortonormale salvo indicazione esplicita contraria.

3. Combinazioni lineari, collinearità e complanarità

Due vettori non nulli sono collineari se uno è un multiplo reale dell’altro. Il coefficiente può essere positivo o negativo; il segno indica lo stesso verso o il verso opposto. Per verificare la collinearità mediante le coordinate, si cerca un coefficiente comune a tutte le componenti. Non si divide alla cieca per una componente che potrebbe essere nulla.

I vettori $(2; -1; 0)$ e $(-6; 3; 0)$ sono collineari con coefficiente -3. I vettori $(2; -1; 0)$ e $(-6; 3; 1)$ non lo sono, perché la terza componente impedisce l’uguaglianza. Il vettore nullo è una combinazione lineare di qualsiasi vettore, ma non può servire come direzione di una retta. Questa particolarità va conservata in mente quando una dimostrazione utilizza un vettore direttore.

Tre punti A, B e C sono allineati quando AB e AC sono collineari. Per mostrare che quattro punti siano complanari, si può chiedere se AD sia una combinazione di AB e AC, purché questi ultimi due vettori non siano collineari. Si risolve allora $AD = \alpha\, AB + \beta\, AC$. L’esistenza di una soluzione significa che D appartiene al piano passante per A e generato da queste due direzioni.

Sia A nell’origine, $AB = (1; 0; 1)$ e $AC = (0; 1; 1)$. Ogni punto del piano ha coordinate $(\alpha; \beta; \alpha + \beta)$. L’equazione del piano è quindi $z = x + y$. Il punto $(1; 1; 2)$ vi appartiene; il punto $(1; 1; 3)$ no. Questa

interpretazione collega direttamente una combinazione lineare a un’equazione cartesiana.

Quando i due vettori scelti sono collineari, generano soltanto una retta. Occorre allora scegliere altre direzioni per descrivere il piano oppure trattare un caso degenere. Una formula scritta con due parametri non è automaticamente una rappresentazione di un piano se le sue direzioni non sono indipendenti.

4. Rappresentare una retta con un parametro

Una retta passante per A con vettore direttore non nullo u è l’insieme dei punti M tali che AM = t u, dove t percorre i reali. Se A = (a; b; c) e u = (u_1; u_2; u_3), si scrive x = a + t u_1, y = b + t u_2, z = c + t u_3. Tutte e tre le coordinate dipendono dallo stesso parametro t. Utilizzare tre parametri indipendenti descriverebbe un insieme differente.

Il punto di partenza e la lunghezza del vettore direttore non sono determinati in modo unico. Sostituire u con 2u conserva la retta; il parametro viene semplicemente riscalato. Sostituire A con un altro punto della retta conserva anch’esso l’insieme. Due espressioni differenti possono quindi rappresentare esattamente lo stesso oggetto.

Per verificare se un punto appartenga alla retta, si cerca un unico valore di t che soddisfi contemporaneamente tutte le coordinate. Per la retta (1 + 2t; t; 2 − t), il punto (3; 1; 1) corrisponde a t = 1 in tutte e tre le equazioni. Il punto (3; 1; 2) non è adatto: le prime due coordinate richiedono t = 1, ma la terza sarebbe allora uno.

Una retta intera, una semiretta e un segmento differiscono nell’insieme dei valori consentiti del parametro. Per il segmento da A a B, è appropriata l’espressione A + t AB con t fra zero e uno. Se t percorre tutti i reali, l’espressione descrive la retta, comprese le parti oltre gli estremi. Dimenticare questa restrizione potrebbe

produrre un’intersezione esterna al segmento effettivamente studiato.

5. Prodotto scalare, norma e angolo

In un riferimento ortonormale, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. La norma di u è $\sqrt{(u \cdot u)}$. Per vettori non nulli, il prodotto scalare è anche uguale a $||u||\ ||v||\ \cos\theta$, dove θ è l’angolo fra i vettori, compreso fra zero e π. Queste due espressioni collegano il calcolo mediante coordinate all’interpretazione geometrica.

Due vettori sono ortogonali quando il prodotto scalare è nullo. Per $u = (1; 2; -1)$ e $v = (2; -1; 0)$, il prodotto è due meno due, quindi zero. Il controllo richiede tutte le componenti; la perpendicolarità apparente delle loro proiezioni in una figura non basta.

In un cubo di spigolo uno, il vettore lungo uno spigolo può essere $(1; 0; 0)$ e quello lungo una diagonale del cubo $(1; 1; 1)$. Il coseno dell’angolo fra essi è $1/\sqrt{3}$. L’angolo vale quindi circa 54,7 gradi. Non è quarantacinque gradi, che è l’angolo fra una diagonale di faccia e uno spigolo di quella faccia. Sono configurazioni differenti.

Sviluppare $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2u \cdot v + ||v||^2$ permette di ritrovare il teorema di Pitagora quando il prodotto scalare è nullo. Permette anche di esprimere il prodotto scalare attraverso le lunghezze. Il segno del termine misto indica se la somma sia più lunga o più corta di quanto sarebbe nel caso ortogonale.

Due rette con direzioni ortogonali non si intersecano necessariamente. Nello spazio, la retta $(t; 0; 0)$ e la retta $(0; 1; s)$ hanno direzioni ortogonali ma nessun punto comune, perché le seconde coordinate restano zero e uno. Si parla di ortogonalità delle direzioni; descrivere le rette come perpendicolari richiede di solito anche che si incontrino. Questa distinzione impedisce di importare troppo rapidamente un’intuizione del piano.

6. Definire un piano mediante un vettore normale

Un vettore normale non nullo n è ortogonale a ogni direzione di un piano. Se il piano passa per A, un punto M vi appartiene quando n·AM = 0. Per n = (a; b; c) e A = (x_A; y_A; z_A), si ottiene a(x − x_A) + b(y − y_A) + c(z − z_A) = 0, da cui un’equazione a x + b y + c z + d = 0.

Almeno uno dei coefficienti a, b e c deve essere diverso da zero. Altrimenti l’equazione sarebbe un’identità o una contraddizione, non l’equazione di un piano. Moltiplicare tutti i coefficienti per la stessa costante non nulla conserva il piano. Il vettore normale non è quindi unico e il suo verso non impone un orientamento obbligatorio al piano.

Il piano x + 2y − z − 3 = 0 ha vettore normale (1; 2; −1) e contiene A = (3; 0; 0). Anche il punto (1; 1; 0) vi appartiene. Una direzione di vettore u giace in questo piano se n·u = 0; un punto appartiene al piano se le sue coordinate soddisfano l’equazione. Confondere questi due controlli significa dimenticare il termine costante che fissa la posizione.

Per costruire una normale da due direzioni non collineari, si può cercare n il cui prodotto scalare con ciascuna sia zero, risolvendo un sistema. Non serve introdurre una tecnica non familiare per risolvere un caso semplice. Il prodotto vettoriale offre un altro metodo, ma qui è un possibile approfondimento, non un prerequisito nascosto.

7. Posizioni relative: un sistema fornisce una conclusione geometrica

Per intersecare la retta A + t u con il piano n·M + d = 0, si sostituiscono le coordinate di M. Si ottiene n·A + d + t(n·u) = 0. Se n·u è diverso da zero, esiste un unico valore di t, quindi un unico punto d'intersezione. Se n·u è zero, la retta è parallela al piano; vi è contenuta se anche n·A + d è zero e altrimenti non lo incontra.

La retta M(t) = (1 + 2t; t; 2 − t) e il piano x + 2y − z − 3 = 0 danno −4 + 5t = 0. L'intersezione corrisponde a t = 4/5 e al punto (13/5; 4/5; 6/5). Controlliamo questo punto nell'equazione del piano. Se la stessa parametrizzazione descrivesse un segmento con t fra zero e uno, l'intersezione resterebbe ammissibile; con t fra due e tre, non lo sarebbe più.

Per due rette, si usano parametri distinti t e s, poi si uguagliano le coordinate. Una soluzione unica dà un'intersezione. Nessuna soluzione può corrispondere a rette parallele distinte o a rette sghembe; le direzioni permettono di distinguere queste situazioni. Un'infinità di soluzioni può esprimere la coincidenza, quando le rette descrivono lo stesso insieme.

Due piani con vettori normali collineari sono paralleli o coincidenti. Con normali non collineari, l'intersezione è una retta. Per esempio, i piani x + y + z = 1 e x − y = 0 danno x = y = t e z = 1 − 2t. La direzione della retta d'intersezione è (1; 1; −2). Ogni punto proposto deve soddisfare entrambe le equazioni, non soltanto una.

8. Proiezione ortogonale su una retta

La proiezione ortogonale H di un punto M su una retta passante per A di direzione u appartiene alla retta e ha MH ortogonale a u. Scrivere H = A + t u trasforma la condizione in (A + t u − M)·u = 0. Poiché u è non nullo, si ottiene t = [(M − A)·u]/||u||².

Per A nell'origine, u = (1; 1; 0) e M = (2; 2; 1), si trova t = 4/2 = 2. Il punto proiettato è H = (2; 2; 0) e la distanza di M dalla retta è uno. Se il vettore direttore fosse stato sostituito con (2; 2; 0), il parametro sarebbe stato uno; il punto H e la distanza sarebbero rimasti identici.

Perché questa distanza è minima? Per ogni altro punto P sulla retta, MH è ortogonale a HP. Il teorema di Pitagora dà $MP^2 = MH^2 + HP^2$, quindi MP ≥ MH. L'uguaglianza richiede P = H. Questa dimostrazione collega la costruzione al problema di ottimizzazione invece di presentare una formula di distanza senza ragione.

Trovare la distanza da un segmento può richiedere un passo aggiuntivo. Se la proiezione sulla retta cade fuori dal segmento, il punto più vicino sul segmento è un estremo. Il problema non è più esattamente quello di una retta infinita. Verificare il valore del parametro evita di calcolare la distanza corretta per l'oggetto sbagliato.

9. Proiezione ortogonale su un piano

Per il piano a x + b y + c z + d = 0, con normale n = (a; b; c), la proiezione H di M si trova sulla retta passante per M di direzione n. Si può scrivere H = M − α n. Richiedere che H appartenga al piano dà $\alpha = (a\,x_M + b\,y_M + c\,z_M + d)/(a^2 + b^2 + c^2)$.

Per M = (1; 1; 4) e il piano x + 2y − z − 3 = 0, il numeratore è −4 e il denominatore sei. Si ottiene H = M + (2/3)(1; 2; −1), quindi H = (5/3; 7/3; 10/3). La sostituzione nell'equazione del piano dà zero. Il vettore MH è collineare alla normale, quindi entrambe le condizioni della proiezione sono soddisfatte.

La distanza dal piano è la norma di MH, ovvero $|a\,x_M + b\,y_M + c\,z_M + d|/\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)}$. Nell'esempio, vale 4/√6, circa 1,63 unità di lunghezza. Il valore assoluto elimina il segno associato al lato del piano; una distanza non può essere negativa.

La minimalità si dimostra come per la retta. Per qualsiasi punto P nel piano, HP è una direzione del piano ed è quindi ortogonale a MH. Pertanto $MP^2 = MH^2 + HP^2$. Il punto H è l'unico che assume la distanza minima. La formula è quindi più di un calcolo comodo: risponde a una proprietà geometrica dimostrata.

10. Luoghi geometrici e volumi

Il piano mediatore del segmento AB è l'insieme dei punti equidistanti da A e B. Sviluppare $MA^2 = MB^2$ elimina i termini quadratici nelle coordinate di M e produce l'equazione di un piano. Questo piano passa per il punto medio del segmento e ha AB come vettore normale. Per A = (0; 0; 0) e B = (2; 0; 0), l'equazione è $x = 1$.

Una superficie sferica di centro O e raggio r è l'insieme dei punti M tali che OM = r. In un riferimento ortonormale centrato in O, l'equazione è $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. La corrispondente palla piena utilizza una disuguaglianza minore o uguale. La superficie e il solido sono insiemi differenti.

La superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ incontra il piano $z = 1$ nella circonferenza $x^2 + y^2 = 3$, situata in quel piano e di raggio $\sqrt{3}$. Un piano a distanza maggiore di due dal centro non incontra la superficie sferica; a distanza esattamente due le è tangente. Questi casi possono essere compresi mediante la distanza del centro dal piano, prima di ogni calcolo dettagliato.

Per un tetraedro di vertici O = (0; 0; 0), A = (2; 0; 0), B = (0; 3; 0), C = (0; 0; 4), la base OAB è un triangolo rettangolo di area tre. L'altezza da C è quattro. Il volume è quindi un terzo di tre per quattro, cioè quattro unità di volume. L'altezza utilizzata in questa definizione deve essere perpendicolare alla base; la lunghezza di uno spigolo obliquo non coincide sempre con l'altezza.

11. Esercizi con soluzioni e controlli

Esercizio A. I punti A = (1; 0; 2), B = (3; 1; 1) e C = (5; 2; 0) sono allineati? AB = (2; 1; −1) e AC = (4; 2; −2) = 2 AB. Sono allineati. Il coefficiente due significa che C si trova nello stesso verso da A, a distanza doppia rispetto a B; non è fra A e B.

Esercizio B. Trovate il piano passante per A = (1; 0; 2) con normale n = (2; −1; 3). L’equazione è 2(x − 1) − y + 3(z − 2) = 0, da cui 2x − y + 3z − 8 = 0. Verificate prima A; la direzione (1; 2; 0) è effettivamente una direzione del piano, perché il suo prodotto scalare con n è zero.

Esercizio C. La retta (t; 2 − t; 1) giace nel piano x + y + z = 3? La somma delle coordinate è sempre tre. L’intera retta è quindi contenuta nel piano, non soltanto il punto ottenuto per un particolare valore di t. Una sostituzione simbolica permette qui una conclusione più forte di un controllo numerico isolato.

Esercizio D. Calcolate la distanza di M = (0; 0; 0) dal piano 2x − y + 2z − 6 = 0. Il valore assoluto del numeratore è sei e la norma della normale è tre. La distanza è due. Moltiplicare l’equazione del piano per cinque moltiplica sia numeratore sia denominatore per cinque; il risultato deve restare invariato.

Esercizio E. Una retta di direzione (1; 0; 0) e una di direzione (0; 1; 0) si intersecano necessariamente? No. Le direzioni sono ortogonali, ma le rette possono trovarsi in piani orizzontali distinti. Per concludere che si incontrino, occorre studiare anche i punti e risolvere le condizioni d’intersezione.

12. Organizzare una dimostrazione nello spazio

Il metodo dipende dalla domanda. Per l’appartenenza, si sostituiscono coordinate o si cerca un parametro. Per il parallelismo, si confrontano direzioni o normali. Per l’ortogonalità, si usa un prodotto scalare precisando gli oggetti coinvolti. Per una distanza minima, si costruisce una proiezione e si giustifica il minimo con il teorema di Pitagora. Questa classificazione trasforma una figura complessa in una successione di controlli mirati.

I calcoli devono conservare l’interpretazione. Un valore del parametro non è una distanza; un vettore normale non è un punto; un’equazione soddisfatta da un punto non descrive automaticamente un’intera retta. Dopo ogni passo, riformulate ciò che il risultato stabilisce e ciò che resta da mostrare. Questa disciplina permette di usare l’algebra senza perdere di vista l’oggetto geometrico.

Riferimento del programma

Programma francese della specializzazione in matematica della Terminale, sezioni su vettori, ortogonalità e rappresentazioni dello spazio. Le configurazioni e le dimostrazioni didattiche sono originali:
https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Capitolo 12 - Statistica, concentrazione e metodi algoritmici

Prospettiva storica - Bienaymé e Chebyshev: delimitare gli scarti

Bienaymé pubblica la disuguaglianza oggi associata ai nomi di Bienaymé e Chebyshev nel 1853; Chebyshev la pubblica a sua volta nel 1867. Questa storia chiarisce il ruolo di una limitazione probabilistica: può controllare il rischio di uno scarto senza descrivere esattamente l'intera distribuzione. Il capitolo distingue quindi una frequenza osservata, una probabilità teorica e una limitazione superiore che può essere poco precisa ma resta valida sotto le proprie ipotesi. Questa prospettiva non garantisce che un campione particolare sia vicino alla media e non attribuisce la scoperta a un solo nome.

Fonte storica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bienayme/

1. Descrivere i dati prima di interpretarli

Una serie di numeri non ha un significato indipendente dalla propria origine. Si chiede quale quantità sia misurata, in quale unità, per quale popolazione, in quali date e secondo quale procedura. Durate, masse e categorie codificate mediante numeri non si trattano allo stesso modo. Un codice postale non è una quantità la cui media avrebbe un significato geografico diretto.

La statistica descrittiva riassume i dati disponibili. L'inferenza cerca di ricavare informazioni su una popolazione o un meccanismo oltre quelle osservazioni. Il passaggio dall'una all'altra richiede ipotesi sul campionamento. Un grafico basato su cento risposte volontarie

può descrivere quelle risposte; non rappresenta automaticamente ogni abitante di un territorio.

Prima di calcolare, verificate valori mancanti, duplicati, cambiamenti di unità e categorie. Un valore assente non dovrebbe essere sostituito con zero senza giustificazione. Zero è un valore e introdurlo può modificare una media o una proporzione. Analogamente, un duplicato non è sempre una ripetizione indipendente; può essere un errore d'inserimento dei dati.

Un riassunto onesto mantiene dimensione del campione e metodo di raccolta vicino al risultato. Dire «la media è sei» non permette di valutare una serie senza unità, dispersione o dimensione. La precisione visualizzata non crea precisione dell'informazione: scrivere sei con dieci cifre decimali non corregge né una misura grossolana né una selezione distorta.

2. Media, mediana e dispersione

Per n osservazioni x_1, …, x_n, la media aritmetica è la loro somma divisa per n. Utilizza ogni valore e può essere sensibile alle osservazioni estreme. Per gruppi di dimensioni differenti, la media complessiva deve ponderare le medie dei gruppi secondo le rispettive dimensioni; fare semplicemente la media delle medie è corretto soltanto in casi particolari.

La mediana divide una serie ordinata in due parti. Con un numero dispari di osservazioni, è il valore centrale. Con un numero pari, la convenzione di calcolo usuale prende la media dei due valori centrali. Questa convenzione va compresa quando si confrontano software o presentazioni. Anche i quartili richiedono una convenzione esplicita: alcuni metodi scelgono valori osservati, altri interpolano.

Per la serie 2; 3; 3; 4; 18, la media è sei e la mediana tre. Il valore diciotto spinge la media verso l'alto. Non rende la media sbagliata;

mostra che la sola media non descrive un valore «tipico». Secondo la domanda, si possono presentare insieme media, mediana e dispersione, invece di scegliere l’indicatore che sostiene meglio una conclusione desiderata.

La varianza descrittiva con divisore n è la media degli scarti dalla media elevati al quadrato. Si può anche calcolare come media dei quadrati meno quadrato della media. Nella serie precedente, la media dei quadrati è 72,4 e il quadrato della media trentasei; la varianza è quindi 36,4 e la deviazione standard circa 6,03. La deviazione standard conserva l’unità delle osservazioni; la varianza ne utilizza il quadrato.

Una varianza campionaria con divisore n − 1 segue una convenzione diversa e serve a un obiettivo particolare di stima. Non è una correzione da applicare automaticamente a ogni serie descrittiva. Prima di usare un comando di calcolo, bisogna sapere quale divisore e quale scopo adotti. Due risultati differenti possono derivare da questa convenzione senza un errore aritmetico.

3. Ponderazione ed effetti di composizione

Due gruppi hanno medie rispettive di dieci e venti. Se il primo contiene novanta osservazioni e il secondo dieci, la media complessiva è undici, non quindici. La ponderazione esprime la quantità d’informazione di ogni gruppo. Non può essere sostituita da una scelta intuitiva quando le dimensioni dei gruppi sono conosciute.

I confronti fra popolazioni possono cambiare con la loro composizione. Supponiamo due attività immaginarie, una facile e una difficile. Un’organizzazione può avere un tasso di successo superiore in ciascuna attività ma un tasso complessivo inferiore se tratta molti più casi difficili. Prima di annunciare un vantaggio complessivo, esaminate categorie e distribuzioni.

Questo fenomeno non giustifica il rifiuto di ogni indicatore aggregato. Invita a rendere esplicita la domanda: vogliamo misurare la prestazione all’interno di una categoria confrontabile oppure il risultato totale di un’organizzazione nella sua attività effettiva? Entrambe le domande sono utili, ma non richiedono necessariamente la stessa ponderazione. Il rigore consiste nell’evitare un passaggio non dichiarato dall’una all’altra.

Un grafico deve anche conservare una scala leggibile. Un asse verticale troncato può far apparire enorme un piccolo cambiamento; una scala logaritmica può essere utile per confrontare rapporti, ma deve essere identificata. La rappresentazione non è una dimostrazione aggiuntiva indipendente dai numeri raffigurati.

4. Somme e medie di variabili aleatorie

Consideriamo n variabili indipendenti e identicamente distribuite, con speranza μ e varianza finita σ². La loro somma S_n ha speranza nμ e varianza nσ². La media M_n = S_n/n ha speranza μ e varianza σ²/n. La deviazione standard è σ/√n. Questa relazione esprime la riduzione della dispersione della media in questo modello di ripetizione.

Dimezzare la deviazione standard richiede quindi di moltiplicare la dimensione del campione per quattro, non per due. Moltiplicare n per cento divide per dieci la deviazione standard della media. Il miglioramento non procede linearmente con il numero di osservazioni. Questa dipendenza spiega il costo di una maggiore precisione di campionamento.

Le ipotesi sono essenziali. Se tutte le osservazioni ripetono lo stesso errore casuale condiviso, la loro media non beneficia della stessa riduzione. Se i valori non seguono la stessa distribuzione, l’interpretazione richiede un adattamento. Se un metodo di

raccolta seleziona sempre la stessa categoria, un grande campione può rendere una media molto precisa senza renderla rappresentativa della popolazione prevista.

La relazione $\sigma/\sqrt{n}$ è una proprietà teorica della distribuzione della media, non una promessa che ogni media osservata si trovi esattamente a quella distanza da μ. Non significa neppure che la deviazione standard delle osservazioni individuali diminuisca quando si raccolgono più dati. Le osservazioni conservano la propria distribuzione; è la loro media che diventa meno dispersa nel modello.

5. Dimostrare la disuguaglianza di Bienaymé-Chebyshev

Per una variabile X di speranza μ e varianza finita V e per un δ strettamente positivo, la disuguaglianza afferma:

$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$.

Collega la probabilità di uno scarto importante a una misura di dispersione. Se il membro destro supera uno, la limitazione resta matematicamente vera ma fornisce meno informazioni del limite elementare di uno per una probabilità. Si può allora conservare il minimo fra i due valori.

Una dimostrazione breve consiste nel porre $Y = (X - \mu)^2$, variabile non negativa. Sull’evento $|X - \mu| \geq \delta$, si ha $Y \geq \delta^2$. La speranza di Y è almeno δ^2 moltiplicato per la probabilità di tale evento, poiché tutti i contributi rimanenti sono non negativi. Ora $E(Y) = V$. Dividere per δ^2 produce la disuguaglianza. Questa dimostrazione mostra perché intervengano il quadrato e la non negatività.

La disuguaglianza non suppone una distribuzione normale. La sua generalità è un vantaggio, ma la limitazione può essere larga. Un risultato $P \leq 0{,}20$ non significa che la probabilità sia 0,20. La probabilità vera può essere molto più piccola. Confondere una

limitazione superiore con un’uguaglianza comprometterebbe il significato stesso di questo strumento.

L’evento comprende scarti maggiori o uguali alla soglia dichiarata. Quando X è discreta, l’inclusione del bordo può contare. Traducete la condizione prima di calcolare una probabilità esatta o confrontarla con una limitazione.

6. Concentrazione di una media e legge dei grandi numeri

Applicare la disuguaglianza a M_n, di varianza σ²/n, dà P(|M_n − μ| ≥ δ) ≤ σ²/(nδ²). Per un δ positivo fissato, il membro destro tende a zero quando n aumenta. La probabilità di uno scarto di almeno δ diventa quindi arbitrariamente piccola nel modello. È una forma della legge dei grandi numeri.

La conclusione riguarda una probabilità, non un’evoluzione monotona di ogni sequenza di medie osservate. Una nuova osservazione può allontanare temporaneamente la media da μ. La legge non afferma neppure che una serie futura debba compensarne una passata. Dopo diversi insuccessi indipendenti, la probabilità di successo della prova successiva resta p; non aumenta per «ristabilire l’equilibrio».

Per una frequenza di successo F_n in uno schema di Bernoulli, μ = p e σ² = p(1 − p). La limitazione diventa P(|F_n − p| ≥ δ) ≤ p(1 − p)/(nδ²). Poiché p(1 − p) ≤ 1/4 per ogni p fra zero e uno, si ha una limitazione uniforme di 1/(4nδ²), anche quando p è sconosciuto.

Per assicurare una limitazione superiore del 5% sulla probabilità di uno scarto di almeno 0,05, la limitazione uniforme richiede n ≥ 1/(4 × 0,05 × 0,05²), dando duemila. È una dimensione sufficiente secondo questa disuguaglianza, non necessariamente la più piccola possibile per una distribuzione particolare. Mirare a 0,02 con la stessa limitazione superiore del rischio dà una dimensione sufficiente di dodicimilacinquecento.

Questi numeri si fondano su prove indipendenti e probabilità costante. Non garantiscono né la rappresentatività di un sondaggio volontario né la validità di un questionario. La sola dimensione del campione non corregge una distorsione di selezione. Precisione probabilistica e adeguatezza della procedura sono due esigenze differenti.

7. Che cosa si può dire dopo un’osservazione

Prima di effettuare le prove, F_n è una variabile aleatoria. Dopo, il suo valore f è un dato. La limitazione di concentrazione fornisce un controllo sulle possibili ripetizioni della procedura. Da sola non assegna una probabilità a posteriori al parametro p dopo aver osservato f.

Si può costruire un intervallo attorno alla frequenza osservata con una garanzia di copertura derivata da un metodo dichiarato. Significa che, nelle ripetizioni della procedura che soddisfano le ipotesi, il metodo produce intervalli contenenti p con una frequenza controllata. Senza un quadro aggiuntivo, ciò non dovrebbe essere riformulato come «questo parametro fisso ha ora una certa probabilità di trovarsi in questo intervallo».

Per il ripasso, è spesso sufficiente distinguere stima, incertezza e garanzia. Una frequenza di 0,42 non stabilisce p = 0,42 esattamente. Una limitazione del rischio non stabilisce che la procedura riuscirà in ogni caso. Un livello di fiducia elevato in un quadro statistico non elimina la possibilità di una procedura concepita male.

Quando una decisione riguarda persone, un sistema tecnico o un fenomeno delicato, l’analisi statistica è soltanto un elemento del ragionamento. Vanno esaminati anche costo degli errori, vincoli e validità della misura. Questa guida non trasforma un metodo di concentrazione in un consiglio medico o finanziario personalizzato.

8. Progettare un algoritmo con un invariante e una terminazione

Un algoritmo è una successione di istruzioni il cui risultato può essere spiegato. Non basta che un programma visualizzi un numero plausibile. Si specificano gli ingressi, il loro dominio, l’uscita, i passaggi e le condizioni di arresto. Un ciclo dovrebbe essere accompagnato da una proprietà conservata, chiamata invariante, e da un argomento che spieghi perché termini quando ciò è richiesto.

Nella bisezione, l’invariante è che l’intervallo corrente contenga una soluzione, sotto le ipotesi di continuità e cambiamento di segno utilizzate. La sua lunghezza viene dimezzata a ogni passo. La terminazione per una tolleranza positiva deriva da questa diminuzione geometrica. La dimostrazione non dipende da un linguaggio di programmazione particolare.

Per trovare il più piccolo intero n tale che q^n ≤ a, con 0 < q < 1 e 0 < a < 1, si può inizializzare n a zero e una variabile v a uno, poi moltiplicare v per q e incrementare n finché v > a. L’invariante è v = q^n. La convergenza di q^n a zero assicura la terminazione nell’aritmetica esatta. Un’implementazione numerica deve considerare anche arrotondamenti e limiti di rappresentazione.

Il controllo della condizione deve corrispondere alla soglia prevista. Sostituire v > a con v ≥ a modifica la risposta quando l’uguaglianza è possibile. È un errore logico, non un dettaglio estetico. Provare un caso in cui la soglia venga raggiunta esattamente può rivelare un difetto invisibile con valori ordinari.

9. Simulazione: esplorare una distribuzione senza dimostrarla

Una simulazione di Bernoulli può generare un valore U uniforme fra zero e uno, poi contare un successo se U < p. Ripetere questo passo n volte simula una serie nel modello numerico scelto. Ripetere serie intere permette di osservare la distribuzione dei conteggi o delle frequenze di successo.

I numeri utilizzati sono generalmente pseudocasuali: provengono da un meccanismo deterministico inizializzato mediante un seme. Fissare questo seme può facilitare la riproduzione di uno studio. Non rende il generatore adatto a ogni applicazione, soprattutto a quelle che richiedono proprietà di sicurezza. Qui serve soltanto a un’esplorazione didattica.

Una simulazione permette di congetturare una relazione, controllare una formula o osservare una dispersione. Non dimostra un’identità valida per ogni parametro. Se un evento raro non compare in nessuna delle mille serie simulate, non si può concludere che la sua probabilità sia zero. Numero di serie e loro variabilità devono accompagnare la conclusione.

Si può anche stimare un integrale mediante simulazione. Per U uniforme su [0; 1], la speranza di U^2 è l’integrale di x^2 su questo intervallo, cioè un terzo. La media di molti valori di U^2 si avvicina a tale quantità sotto le condizioni del modello. La varianza individuale è $1/5 - 1/9 = 4/45$; per diecimila osservazioni indipendenti, la deviazione standard teorica della media è circa 0,00298. Un risultato vicino a 0,33 è atteso, ma non dimostra il risultato esatto.

10. Stabilità numerica e controlli indipendenti

Un’identità esatta può condurre a un calcolo numerico fragile. Sottrarre due numeri molto vicini può far perdere alcune cifre significative. Calcolare fattoriali enormi e poi dividerli può superare la capacità di rappresentazione anche quando il coefficiente binomiale finale resta gestibile. Contano quindi anche ordine e organizzazione delle operazioni.

Per una distribuzione binomiale con $0 < p < 1$, si può partire da $q_0 = (1 - p)^n$ e calcolare successivamente $q_{k+1} = q_k \times (n - k)/(k + 1) \times p/(1 - p)$. Questa ricorrenza evita di calcolare ripetutamente i fattoriali. Non risolve ogni problema: per n molto grande, q_0 può diventare numericamente troppo piccolo e richiedere un trattamento differente. I casi $p = 0$ e $p = 1$ vanno trattati separatamente.

Un controllo utile verifica che tutte le probabilità siano positive e che la loro somma sia vicina a uno entro la precisione disponibile. Si può controllare la speranza calcolata dalla distribuzione e confrontarla con n p. Questi controlli non sostituiscono una dimostrazione dell’algoritmo, ma individuano errori di parametro o d’indice.

Per la radice quadrata di due, un’iterazione di Newton dà $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ con $u_0 = 1$. I primi valori sono 1,5 e poi circa 1,41667. Da u_1 in poi, i valori restano superiori a $\sqrt{2}$ e diminuiscono. Porre $e_n = u_n - \sqrt{2}$ permette di stabilire $e_{n+1} = e_n^2/(2u_n)$, relazione che spiega il rapido miglioramento in questo caso. Non giustifica una garanzia di convergenza per ogni metodo di Newton applicato a ogni funzione.

11. Esercizi con soluzioni e discussione

Esercizio A. Due gruppi di dieci e trenta persone hanno medie rispettive di dodici e sedici. La media complessiva è (10 × 12 + 30 × 16)/40 = quindici. Quattordici, la media non ponderata delle due medie, assegnerebbe lo stesso peso ai gruppi nonostante le diverse dimensioni.

Esercizio B. Una variabile ha speranza dieci e varianza quattro. Quale limitazione superiore fornisce Bienaymé-Chebyshev per uno scarto di almeno cinque? La limitazione è 4/25 = 0,16. È corretto dire che la probabilità è al massimo il 16%. Sarebbe scorretto dire che è esattamente il 16% o che l’84% dei valori debba distribuirsi uniformemente nell’intervallo centrale.

Esercizio C. Variabili indipendenti e identicamente distribuite hanno varianza nove. Per la loro media su cento osservazioni, la varianza è 0,09 e la deviazione standard 0,30. Su quattrocento osservazioni, la deviazione standard è 0,15. Dimezzare la deviazione standard corrisponde a moltiplicare la dimensione del campione per quattro, in accordo con la dipendenza dalla radice quadrata.

Esercizio D. Per una frequenza di Bernoulli di parametro p = 0,40 e n = mille, delimitate la probabilità di uno scarto di almeno 0,05. Si trova 0,40 × 0,60/(1 000 × 0,05²) = 0,096. La limitazione uniforme darebbe 0,10. Conoscere p migliora leggermente questo limite superiore, ma non dà la probabilità esatta.

Esercizio E. Un programma inizializza v a uno e moltiplica v per 0,5 finché v ≥ 0,125. Si ferma in v = 0,0625 dopo quattro moltiplicazioni. Per trovare il primo indice in cui v ≤ 0,125, il controllo dovrebbe essere v > 0,125 e il programma si fermerebbe dopo tre moltiplicazioni. Analizzare il caso di uguaglianza rivela la differenza fra le domande.

Esercizio F. Cento volontari scelgono di rispondere a un sondaggio dopo aver letto un messaggio su una difficoltà che incontrano. Si può applicare una garanzia di campionamento indipendente e rappresentativo a tutti gli utenti? Non senza giustificazione. I volontari possono avere caratteristiche diverse da quelle di chi non risponde. Aumentarne il numero non elimina automaticamente questa distorsione.

12. Costruire una sintesi per il ripasso

Per ogni concetto, preparate una definizione, una proprietà con le sue ipotesi, una dimostrazione breve, un esercizio e un controesempio. In probabilità, il controesempio può riguardare l’indipendenza; in analisi, una continuità mancante; in geometria, un’intersezione supposta erroneamente; negli algoritmi, una condizione di ciclo tradotta male.

Una buona sintesi non recita ogni formula. Sceglie quella che corrisponde alla domanda e spiega perché le altre sarebbero insufficienti. Conserva la distinzione fra dimostrazione, approssimazione e simulazione. Infine, verifica che la risposta affronti il problema originario, con precisione e interpretazione appropriate.

Riferimenti del programma e metodologici

Programma francese della specializzazione in matematica della Terminale, per concentrazione, legge dei grandi numeri e algoritmi; tutte le situazioni e le spiegazioni sono originali: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

NIST, indicazioni descrittive sulle misure di posizione, consultate per distinguere media e mediana senza riprodurne le formulazioni: https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda351.htm

Appendici - Problemi di sintesi, soluzioni commentate e strategie di ripasso

A. Studiare una famiglia di funzioni con un parametro

Consideriamo f_a(x) = ln x − a x sui numeri reali strettamente positivi, dove a è un parametro strettamente positivo. Dobbiamo distinguere l'incognita x dal parametro a. Quando studiamo una funzione della famiglia, a rimane fisso. La derivata è f_a'(x) = 1/x − a; è positiva prima di x = 1/a, nulla in questo punto e negativa dopo.

La funzione presenta dunque un massimo in 1/a. Il suo valore è ln(1/a) − 1, ossia −ln a − 1. Il limite per x che tende a zero attraverso valori positivi è meno infinito. Anche il limite per x che tende a più infinito è meno infinito, perché, per un valore positivo fissato di a, il termine lineare negativo prevale sul logaritmo. Questi limiti e gli intervalli di crescita e decrescita permettono di contare le soluzioni di f_a(x) = 0.

Se a < 1/e, il massimo è strettamente positivo. La continuità e la monotonia stretta su ciascuno dei due intervalli danno allora due soluzioni distinte, una prima di 1/a e l'altra dopo. Se a = 1/e, il massimo è nullo: l'unica soluzione è x = e. Se a > 1/e, il massimo è negativo e non esiste alcuna soluzione. Abbiamo classificato l'intera famiglia senza dover calcolare esplicitamente ogni radice.

Il ragionamento separa l'esistenza dall'unicità. La continuità, insieme a valori di segno opposto, assicura una radice; la monotonia stretta sull'intervallo considerato assicura che non possano essercene due. Il massimo e i limiti permettono di decidere su quali intervalli applicare questi argomenti. La sola osservazione di un grafico potrebbe suggerire il risultato, ma non lo giustificherebbe per ogni parametro.

La derivata seconda è $-1/x^2$: tutte le funzioni di questa famiglia sono strettamente concave. Nel caso limite a = 1/e, la curva tocca l'asse nel suo massimo. Non è quindi necessario un cambiamento di segno perché esista una radice. Questo esempio completa il metodo dei valori intermedi mostrando una situazione nella quale una ricerca basata soltanto su segni opposti non troverebbe la soluzione.

Per ripassare, riprendete il problema con ln x + a x, per a positivo. La derivata diventa 1/x + a, sempre positiva. I limiti vanno da meno infinito a più infinito, quindi l'equazione ha un'unica soluzione. Un cambiamento di segno nell'espressione modifica la struttura del problema; copiare la precedente tabella di variazione senza rifare i calcoli sarebbe un errore.

B. Una successione definita da una frazione, con un passaggio al limite giustificato

Definiamo $u_0 = 1$ e u_(n+1) = (2u_n + 3)/(u_n + 2). Prima di cercare un limite, dobbiamo dimostrare che tutti i termini esistono e controllarne il dominio. La funzione $\varphi(x) = (2x + 3)/(x + 2)$ è definita su $[1,\sqrt{3}]$, perché il suo denominatore vi è positivo. La sua derivata è $1/(x + 2)^2$, quindi è crescente su questo intervallo.

Abbiamo $\varphi(1) = 5/3$ e $\varphi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Poiché $1 \leq 5/3 \leq \sqrt{3}$, la funzione manda l'intervallo in sé stesso. La dimostrazione per induzione prova dunque che ogni termine è compreso fra uno e $\sqrt{3}$. Il calcolo mediante questa funzione è ora garantito a ogni passaggio.

La differenza $\varphi(x) - x$ è $(3 - x^2)/(x + 2)$. È non negativa su $[1,\sqrt{3}]$. Di conseguenza, u_(n+1) ≥ u_n: la successione è crescente e limitata superiormente. Converge dunque a un limite ℓ appartenente a questo intervallo. Solo a questo punto la continuità di φ consente di scrivere $\ell = \varphi(\ell)$.

L’equazione del punto fisso conduce a $\ell^2 = 3$. Le due radici algebriche sono $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$, ma il limite appartiene a $[1,\sqrt{3}]$. È quindi $\sqrt{3}$. Risolvere l’equazione all’inizio avrebbe fornito dei candidati senza stabilire l’esistenza di un limite né selezionare il candidato corretto.

I primi termini sono $u_1 = 5/3$, $u_2 = 19/11$ e $u_3 = 71/41$, approssimativamente 1,6667, 1,7273 e 1,7317. Sono coerenti con la dimostrazione, ma non la sostituiscono. Una serie di valori apparentemente stabilizzati non basterebbe a giustificare la convergenza per tutti i passaggi successivi.

Un approfondimento può maggiorare la differenza fra le immagini mediante una costante minore di uno sull’intervallo. La derivata vi è al massimo 1/9, il che suggerisce una forte contrazione. Questa tecnica supera le richieste principali dell’esercizio e va presentata come approfondimento. La soluzione al livello della Terminale francese si fonda già sull’invarianza dell’intervallo, sulla monotonia, sull’esistenza di un maggiorante e sulla continuità.

C. Ottimizzazione con un vincolo geometrico

Una lastra rettangolare immaginaria deve avere un’area di 48 unità quadrate. Cerchiamo il rettangolo di perimetro minimo fra quelli con lati strettamente positivi. Se un lato è x, l’altro è $48/x$ e il perimetro è $P(x) = 2x + 96/x$ per x positivo. Il dominio fa parte del modello; i valori nulli e negativi non descrivono un rettangolo ammissibile.

La derivata è $2 - 96/x^2$. Si annulla in $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. È negativa prima di questo valore e positiva dopo. Il minimo globale si raggiunge dunque per un quadrato, con entrambi i lati uguali a $4\sqrt{3}$ e perimetro $16\sqrt{3}$. I limiti infiniti alle due estremità del dominio sono coerenti con il risultato, ma la tabella di variazione è già sufficiente a stabilire il minimo.

Una dimostrazione senza derivazione usa la disuguaglianza $x + 48/x \geq 2\sqrt{48}$ per x positivo, ottenuta sviluppando un quadrato opportunamente scelto. L'uguaglianza richiede $x = 48/x$. Entrambi i procedimenti stabiliscono lo stesso risultato; il secondo può chiarire la simmetria del problema, mentre il primo si adatta facilmente ad altre funzioni di costo.

Supponiamo ora che un lato debba essere almeno dieci. Il dominio diventa $x \geq 10$. Poiché dieci supera $4\sqrt{3}$, la funzione vi è crescente e il minimo vincolato si trova in $x = 10$, con l'altro lato uguale a 4,8. Il rettangolo ottimale non è più un quadrato. Richiamare una conclusione senza tener conto del dominio produrrebbe una risposta non ammissibile.

Infine, se i lati rappresentano dimensioni reali, lo spessore, i margini, i costi dei materiali e i vincoli di fabbricazione possono modificare l'obiettivo. Il problema matematico è esatto entro la propria definizione; applicarlo richiede di verificare se tale definizione risponde al bisogno. Un'ottimizzazione non sceglie da sola il criterio corretto.

D. Una probabilità per una decisione e le sue ipotesi

Un sistema immaginario esegue un compito quando funzionano due componenti indipendenti, ciascuno con probabilità 0,90. Se entrambi sono indispensabili, la probabilità che il sistema funzioni è 0,81. Se ne basta uno e il modello di riserva è correttamente rappresentato dall'evento «almeno uno funziona», la probabilità è $1 - 0{,}10^2 = 0{,}99$.

Questi risultati non sono due stime concorrenti per la stessa configurazione. Gli eventi di funzionamento sono diversi. La prima configurazione corrisponde a un'intersezione; la seconda al complementare dell'evento in cui entrambi i componenti si

guastano. Identificare il ruolo dei componenti precede quindi il calcolo delle probabilità.

Anche l’indipendenza è un’ipotesi importante. Se i componenti dipendono dalla stessa alimentazione elettrica, che può guastarsi, i loro stati non sono più necessariamente indipendenti. Un calcolo che conservi 0,99 senza tener conto di questa causa comune può sovrastimare l’affidabilità. Non si corregge il problema cambiando arbitrariamente i decimali; occorre rivedere il modello.

Per una procedura di dieci prove indipendenti con probabilità di successo 0,90, la probabilità di dieci successi è $0{,}90^{10}$, approssimativamente 34,9%. Una probabilità elevata per ciascuna prova non implica dunque la certezza di riuscire per l’intera serie. La probabilità di almeno un insuccesso è approssimativamente 65,1%. Questi risultati non contraddicono il fatto che il numero atteso di successi sia nove.

Possiamo spiegare la distinzione confrontando tre domande: il successo in una prova, il numero medio di successi e il successo in tutte le prove. Usano gli stessi parametri, ma descrivono eventi o indicatori diversi. Una scrittura rigorosa identifica la domanda a cui risponde e non usa un solo risultato per rispondere a tutte e tre.

E. Geometria e ottimizzazione di una distanza

In un sistema di riferimento ortonormale, il punto $M = (2;-1;3)$ è fisso e una retta è descritta da $H(t) = (t; t; 0)$. Il quadrato della distanza è $D(t) = (t - 2)^2 + (t + 1)^2 + 9 = 2t^2 - 2t + 14$. Lo studio della derivata dà $D'(t) = 4t - 2$, quindi un minimo in $t = 1/2$.

Il punto più vicino è $H = (1/2;1/2;0)$. Il quadrato della distanza è 13,5 e la distanza $\sqrt{13{,}5}$. Il vettore $MH = (-3/2;3/2;-3)$ ha prodotto scalare nullo con il vettore direttore $(1;1;0)$. Il metodo di ottimizzazione algebrica ritrova dunque la proiezione ortogonale e la condizione geometrica fornisce un controllo indipendente.

Se il problema riguarda soltanto il segmento con t compreso fra uno e due, il punto t = 1/2 non è ammissibile. La funzione D è crescente su questo segmento; il suo minimo vi si raggiunge in t = 1, nel punto (1;1;0). Il quadrato della distanza è quattordici. Un valore minimo su una retta non risponde automaticamente a una domanda relativa a un segmento.

Lavorare con il quadrato della distanza è utile perché la radice quadrata è crescente sui numeri non negativi: minimizzare D equivale a minimizzare √D. Ciò semplifica i calcoli senza modificare l'obiettivo. La giustificazione va fornita, invece di supporre che qualunque funzione esterna possa essere eliminata da un problema di ottimizzazione.

F. Dimostrare una disuguaglianza e riconoscere i casi di uguaglianza

Per ogni x positivo vogliamo stabilire $x \ln x - x + 1 \geq 0$. Definiamo $g(x) = x \ln x - x + 1$. La sua derivata è $\ln x$. È negativa su $(0;1)$, nulla in uno e positiva su $(1;+\infty)$. La funzione presenta dunque un minimo globale in uno e $g(1) = 0$. La disuguaglianza è dimostrata; l'uguaglianza vale soltanto per $x = 1$.

La derivata seconda è $1/x$, positiva. Possiamo interpretare il risultato anche attraverso la convessità di $x \ln x$: la sua tangente in uno ha equazione $y = x - 1$ e la curva rimane al di sopra di essa. Le due dimostrazioni esprimono aspetti dello stesso ragionamento. La prima usa la crescita e la decrescita; la seconda usa una proprietà geometrica delle funzioni convesse.

La condizione $x > 0$ è indispensabile perché il logaritmo sia definito. Potremmo studiare un prolungamento continuo di $x \ln x$ in zero, ma tale prolungamento deve essere costruito e dichiarato; non può essere usato tacitamente nella dimostrazione iniziale. I

domini non sono semplici precauzioni di presentazione: determinano dove esistono gli oggetti.

Riconoscere il caso di uguaglianza è spesso indispensabile nell'ottimizzazione. Un minorante privo di una condizione per raggiungerlo non basta sempre a identificare una soluzione. Qui il minorante zero è raggiunto e l'unicità segue dalla variazione stretta sui due lati. Una buona soluzione commentata distingue tre fatti: il minorante, il suo raggiungimento e l'unicità.

G. Preparare una soluzione articolata in più passaggi

Per un esercizio di sintesi, cominciate indicando le dipendenze: quale domanda usa quale risultato precedente? Il calcolo di un limite può stabilire un segno, che stabilisce l'esistenza di una radice, che consente poi di determinarne dei limiti inferiore e superiore. Se un risultato intermedio è fornito o ammesso, talvolta possiamo usarlo per proseguire, indicando chiaramente ciò che resta da dimostrare.

Conservate i valori esatti quando i passaggi successivi li utilizzano. Arrotondare troppo presto può spostare una soglia intera o modificare una differenza molto piccola. Presentate le approssimazioni alla fine, con un simbolo appropriato. Quando compaiono più soluzioni algebriche, tornate al dominio e alle condizioni del problema per decidere quali siano ammissibili.

Se usate uno strumento di calcolo, annotate ciò che ha effettivamente fatto: valutazione, tracciamento del grafico, soluzione approssimata o simulazione. Un grafico che sembra mostrare un'unica intersezione non dimostra l'unicità. Una lista di dieci termini non dimostra la convergenza. Lo strumento può guidare la scelta della dimostrazione e controllare un risultato; non trasforma un'osservazione in una proposizione generale.

H. Ripassare attraverso errori spiegati

Costruite un breve quaderno degli errori organizzato per categorie: dominio dimenticato, implicazione invertita, ipotesi mancante, condizione di un ciclo, traduzione errata di un evento, confusione fra punto e vettore, arrotondamento prematuro. Per ogni errore scrivete un esempio scorretto e la sua correzione giustificata. Lo scopo è riconoscere la struttura dell'errore in un esercizio diverso, anziché memorizzare soltanto una risposta.

Alternate problemi nei quali una tecnica familiare funziona con problemi nei quali sarebbe inappropriata. Per la distribuzione binomiale, confrontate il campionamento con e senza reinserimento. Per l'ottimizzazione, confrontate un dominio aperto con un dominio vincolato. Per un integrale, confrontate l'area geometrica con l'accumulazione con segno. Questa alternanza insegna a scegliere, anziché applicare automaticamente.

Un'autovalutazione utile consiste nel rifare un esercizio alcuni giorni dopo averlo letto, poi spiegare perché un altro metodo possibile sarebbe più lungo o insufficiente. In questo modo si verifica la ricostruzione del ragionamento. La sensazione di scorrevolezza durante la lettura può derivare dal fatto che la soluzione è già presente e non va confusa con una padronanza autonoma.

La guida propone esempi e metodi, anziché una promessa di risultati scolastici. Una risposta corretta deve essere anche chiara, pertinente e coerente: dichiarate ciò che volete dimostrare, verificate che le ipotesi corrispondano alla domanda e concludete indicando l'ambito esatto del risultato. Questa esigenza resta utile anche quando i calcoli sono già corretti.