

ORCHESTRATEUR

Mathématiques - Définir, démontrer, calculer et interpréter

Un guide approfondi, disponible hors ligne

Lire, comprendre, retrouver un chapitre

LAFAYETTE DIGITAL PRODUCTS

Sommaire

Le sommaire est cliquable. Les signets du PDF donnent accès aux chapitres et aux sections. Le lien en bas de chaque page permet de revenir ici.

Chapitre 1 - Du problème à la preuve : domaine, implication et contre-exemple 7

Chapitre 2 - Suites et récurrence : comprendre une évolution discrète 16

Chapitre 3 - Limites : établir un comportement sans confondre calcul et preuve 24

Chapitre 4 - Continuité : prouver une existence, une unicité et un encadrement 33

Chapitre 5 - Dérivation et optimisation : passer d'une variation locale à une conclusion 43

Chapitre 6 - Convexité : comparer une courbe, ses cordes et ses tangentes 52

Chapitre 7 - Exponentielle, logarithme et trigonométrie : transformer sans perdre le domaine 62

Chapitre 8 - Primitives et intégrales : mesurer une accumulation et contrôler une approximation 71

Chapitre 9 - Équations différentielles : relier une évolution à sa vitesse de changement 80

Chapitre 10 - Dénombrement, probabilités et loi binomiale 89

Chapitre 11 - Géométrie dans l'espace : vecteurs, plans et distances 101

Chapitre 12 - Statistiques, concentration et démarches algorithmiques 112

Annexes - Problèmes longs, corrections et stratégies de révision 124

Mathématiques - Définir, démontrer, calculer et interpréter

Une progression de niveau Terminale

Ce guide développe les principaux outils mathématiques de la spécialité de Terminale générale, avec les rappels de première nécessaires à leur compréhension. Il organise des définitions, des démonstrations, des méthodes et des exercices originaux. Le programme institutionnel est un repère de périmètre, pas un texte reproduit ni une garantie de couverture de toutes les modalités d'une session d'examen future. Les approfondissements sont annoncés lorsqu'ils dépassent le cœur du parcours.

L'objectif n'est pas d'accumuler des formules, mais de reconnaître les conditions qui permettent de les utiliser. Une dérivée calculée correctement ne répond pas seule à un problème d'optimisation. Une loi binomiale ne convient pas à toute répétition de tirages. Une figure dans l'espace ne prouve pas une intersection. Chaque thème relie donc le sens des objets à une démarche dont les étapes peuvent être justifiées.

Les situations numériques sont pédagogiques et fictives lorsqu'elles ne décrivent pas simplement un objet mathématique. Aucun rendement financier, résultat médical ou comportement réel d'un produit n'est garanti. Les applications servent à comprendre un raisonnement et ses limites. Elles ne remplacent pas une analyse professionnelle d'une décision sensible.

Comment utiliser les douze chapitres

Le premier chapitre expose le langage et les raisonnements. Les deux suivants développent les suites et les limites. La continuité, la dérivation et la convexité forment ensuite un ensemble cohérent pour étudier les fonctions. Le septième chapitre rassemble exponentielle, logarithme et trigonométrie ; le huitième traite des intégrales ; le neuvième des équations différentielles. Les probabilités, la géométrie de l'espace et les statistiques avec l'algorithmique complètent le parcours.

Pour une première lecture, avancez dans cet ordre et refaites les exemples simples. Pour une révision, choisissez une question précise et retrouvez la propriété dont dépend sa réponse. Les annexes proposent des problèmes transversaux qui demandent plusieurs outils. Elles ne répètent pas seulement les calculs des chapitres : elles montrent comment organiser une résolution plus longue et discuter ce qui change avec les hypothèses.

Travaillez avec une feuille ou un support de notes, même si vous consultez le guide sur téléphone. Lisez l'énoncé, cachez la correction et rédigez au moins une tentative. Une erreur expliquée est souvent plus formatrice qu'une correction immédiatement comprise. Notez le premier passage où votre raisonnement a cessé d'être justifié, pas seulement le dernier résultat différent.

Écriture, exactitude et approximation

Les symboles sont définis dans le contexte. Une égalité exacte et une approximation numérique ne jouent pas le même rôle : conserver une forme comme $\ln 2$ ou $\sqrt{3}$ peut éviter des erreurs d'arrondi. Un intervalle, une condition de domaine ou un indice initial fait partie du résultat. Retirer ces informations peut transformer une réponse exacte en affirmation fausse.

Une démonstration établit une proposition pour toutes les valeurs annoncées. Un exemple vérifie seulement un cas ; un contre-exemple suffit en revanche à réfuter une affirmation universelle. Une simulation explore un modèle, mais ne remplace pas une preuve. Ces distinctions traversent tout le guide et constituent une compétence aussi importante que la maîtrise technique.

Pour contrôler une solution, cherchez une méthode indépendante : une dérivée pour vérifier une primitive, une substitution pour vérifier une équation différentielle, une probabilité complémentaire pour contrôler un événement, une équation de plan pour vérifier un point calculé. Le contrôle ne doit pas être une simple répétition de l'opération qui a produit l'erreur possible.

La longueur d'un développement ne garantit ni maîtrise ni note scolaire. Pour utiliser ce guide, choisissez une notion, reconstruisez son raisonnement sans regarder la correction, puis vérifiez les hypothèses et les calculs. L'objectif est de pouvoir transférer une méthode à un problème nouveau, et non d'avoir simplement parcouru davantage de pages.

Chapitre 1 - Du problème à la preuve : domaine, implication et contre-exemple

Objectifs : identifier la nature du résultat recherché, distinguer vérification et preuve, expliciter les domaines et les transformations. Le module initial est intégré ici une seule fois comme parcours de fondation ; les chapitres suivants approfondissent chaque famille de problèmes.

Repère historique - Hilbert : rendre les hypothèses visibles

En 1899, David Hilbert publie Grundlagen der Geometrie, une présentation axiomatique de la géométrie. Ce repère rappelle qu'une figure familière ne dispense pas de préciser les relations admises et les propriétés démontrées. Dans ce chapitre, la même exigence s'applique au domaine d'une variable et aux conditions d'une transformation : une conclusion ne vaut que sous les hypothèses effectivement utilisées. Ce rapprochement est pédagogique ; le guide n'expose pas le système d'axiomes de Hilbert ni ne prétend résoudre les questions de fondement.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/

1. Savoir ce que l'on cherche à établir

Un calcul peut produire une valeur, une conjecture ou une démonstration : ces résultats n'ont pas le même statut. Vérifier une relation pour cinq valeurs suggère qu'elle pourrait être vraie ; cela ne la prouve pas pour tous les nombres. Une démonstration explique pourquoi la conclusion suit des hypothèses dans tout le domaine annoncé. Un seul contre-exemple, en revanche, suffit à réfuter une affirmation universelle.

Considérons « pour tout réel x, $x^2 > x$ ». Les valeurs 2 et 3 vérifient cette inégalité, mais $x = 0$ la réfute déjà. Le réel 1/2 fournit même $x^2 < x$. L'échec ne vient pas d'un manque de calculs : la proposition était trop large. Pour chercher un énoncé correct, factorisons $x^2 - x = x(x - 1)$, puis étudions le signe selon les intervalles. On obtient $x^2 > x$ lorsque $x < 0$ ou $x > 1$.

Avant une résolution, précisez le domaine, les données et le type de réponse : valeur exacte, approximation, existence, unicité ou propriété valable pour tout indice. Ces distinctions orientent la méthode et évitent de présenter une approximation graphique comme une preuve.

2. Implication, équivalence et domaine de définition

Deux propositions sont équivalentes lorsqu'elles s'impliquent dans les deux sens. Élever au carré une égalité peut conserver une implication sans conserver l'équivalence. L'égalité $x = 2$ entraîne $x^2 = 4$; l'équation $x^2 = 4$ admet aussi $x = -2$. Dans une chaîne de résolution, indiquer les conditions qui rendent les transformations réversibles permet de repérer les solutions supplémentaires.

Diviser par une expression exige qu'elle ne soit pas nulle. Pour résoudre $x(x - 2) = 0$, diviser d'emblée par x supprime la solution $x = 0$. La propriété du produit nul donne directement $x = 0$ ou $x = 2$. De même, une expression contenant $\ln(x)$ exige $x > 0$. Le domaine n'est pas une précaution ajoutée après le calcul : il fait partie du problème dès le départ.

Une bonne habitude consiste à encadrer les restrictions au début, puis à vérifier les solutions obtenues dans l'équation initiale. Cette dernière vérification ne remplace pas la preuve que toutes les solutions ont été trouvées, mais elle élimine celles introduites par une transformation non réversible.

3. Une suite : décrire une évolution discrète

Une suite associe une valeur u_n à chaque indice entier de son domaine. Une expression explicite donne directement u_n en fonction de n ; une relation de récurrence calcule une valeur à partir des précédentes. Les deux descriptions peuvent représenter la même évolution, mais elles facilitent des questions différentes.

Prenons u_0 = 1 et u_(n+1) = 0,5 u_n + 2. Les premiers termes sont 1 ; 2,5 ; 3,25 ; 3,625. Ils suggèrent une croissance vers 4, sans la démontrer. Cherchons une valeur fixe L satisfaisant L = 0,5 L + 2 : on trouve L = 4. Posons v_n = u_n − 4. Alors v_(n+1) = 0,5 v_n, donc v_n = −3 × (0,5)^n et u_n = 4 − 3 × (0,5)^n.

Cette expression permet de justifier les observations. Comme (0,5)^n est strictement positif, u_n < 4. De plus, u_(n+1) − u_n = 1,5 × (0,5)^n > 0 : la suite est croissante. Enfin, (0,5)^n tend vers zéro, donc u_n tend vers 4. Un calcul de valeurs est devenu une preuve grâce à une structure identifiée.

4. La récurrence : ne pas oublier le premier maillon

Une démonstration par récurrence comporte une initialisation, une hérédité et une conclusion. Pour prouver u_n < 4 dans l'exemple précédent, on commence par u_0 = 1 < 4. Si u_n < 4, alors u_(n+1) = 0,5 u_n + 2 < 0,5 × 4 + 2 = 4. La propriété vaut donc pour tous les entiers n ≥ 0.

Le signe positif de 0,5 est utilisé : multiplier une inégalité par un nombre négatif inverserait son sens. Écrire seulement « supposons la propriété vraie » puis retrouver une phrase ressemblante ne constitue pas une hérédité. Il faut montrer exactement comment l'hypothèse sur n produit la conclusion sur n + 1.

La récurrence n'est pas une explication circulaire. L'initialisation établit un cas sans supposer la conclusion générale ; l'hérédité

décrit un passage valable à partir de n'importe quel cas déjà établi. Retirer l'un de ces deux éléments détruit l'argument.

5. Dériver pour comprendre une variation

Le quotient [f(x + h) − f(x)] / h décrit une variation moyenne lorsque h est non nul. Si sa limite existe quand h tend vers zéro, elle définit f'(x). Géométriquement, la dérivée donne la pente de la tangente ; dans un modèle de position, elle peut représenter une vitesse. Les unités de la dérivée sont celles de f divisées par celles de x.

Sur un intervalle, le signe de la dérivée renseigne sur les variations sous les hypothèses usuelles de dérivabilité. Chercher les zéros de f' ne suffit pourtant pas à déterminer un maximum global. Il faut examiner le signe, le domaine et, selon le problème, les bornes. Un point où f' s'annule peut aussi être un minimum ou ne correspondre à aucun extremum.

Pour une composée g(u(x)), la dérivée est g'(u(x)) × u'(x). La dérivée de e^(−2x) est donc −2 e^(−2x), et non simplement e^(−2x). Le facteur associé à la fonction intérieure est souvent la partie oubliée. Vérifier l'allure attendue aide ici : une décroissance exponentielle doit avoir une dérivée négative.

6. Optimiser sous une contrainte

Un rectangle a un périmètre de 20 m. Si ses côtés valent x et y, on a x + y = 10. Son aire n'est donc pas une fonction de deux variables indépendantes : A(x) = x(10 − x), avec 0 ≤ x ≤ 10 si l'on inclut les cas limites dégénérés pour l'étude mathématique.

La dérivée A'(x) = 10 − 2x est positive avant 5 et négative après 5. L'aire maximale vaut A(5) = 25 m² ; le rectangle correspondant est un carré. Une autre preuve vient de A(x) = 25 − (x − 5)². Ces deux approches sont compatibles : l'une mobilise les variations, l'autre

une propriété algébrique. Comparer des méthodes pertinentes enrichit le raisonnement sans créer un désaccord artificiel.

Il reste à interpréter la réponse. Si une contrainte supplémentaire imposait une largeur inférieure à 3 m, le maximum précédent ne serait plus admissible. Résoudre le problème idéal puis oublier les contraintes réelles reviendrait à répondre à une autre question.

7. Existence et unicité sont deux résultats distincts

Considérons $f(x) = x^3 + x - 1$. Elle est continue sur $[0 ; 1]$, avec $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$. Le théorème des valeurs intermédiaires garantit donc au moins une solution de $f(x) = 0$ dans cet intervalle. Comme $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, la fonction est strictement croissante : cette solution est unique.

La continuité permet d'établir l'existence ; la stricte monotonie permet d'obtenir l'unicité. Les deux propriétés ne doivent pas être confondues. Une fonction continue peut rencontrer plusieurs fois une même valeur. Une fonction strictement croissante peut ne pas atteindre la valeur recherchée sur un intervalle donné.

La dichotomie donne ensuite un encadrement. Ici $f(0,5) = -0,375$ et $f(0,75) = 0,171875$: la solution appartient à $[0,5 ; 0,75]$. Chaque étape conserve un changement de signe et divise la longueur de l'intervalle par deux. L'encadrement, accompagné de la méthode, est plus informatif qu'une longue décimale non justifiée.

8. Logarithmes et interprétation d'un seuil

L'exponentielle et le logarithme népérien sont réciproques sur leurs domaines adaptés. Pour résoudre e^(−2t) = 0,1, on prend le logarithme de quantités positives : $-2t = \ln(0,1) = -\ln(10)$, d'où $t = \ln(10)/2$, soit environ 1,1513 dans l'unité de temps du modèle.

La solution d'une équation n'est pas toujours le même résultat qu'un seuil d'inégalité. Si l'on demande e^(−2t) ≤ 0,1 pour t ≥ 0, la réponse est t ≥ ln(10)/2, car l'exponentielle considérée décroît. L'expression ln(a + b) = ln(a) + ln(b) est fausse en général : le logarithme transforme un produit de facteurs positifs en somme, pas une somme en somme.

Dans notre suite, demander 4 − u_n < 0,01 conduit à 3 × (0,5)^n < 0,01. Le premier indice admissible est n = 9 : l'écart à n = 8 vaut 0,01171875 et celui à n = 9 vaut 0,005859375. L'indice étant entier, une valeur réelle obtenue par logarithme doit encore être interprétée correctement.

9. Exercices corrigés

A - Contre-exemple. « Si $a^2 = b^2$, alors a = b. » **Correction :** a = 1 et b = −1 réfutent l'énoncé. La conclusion correcte sur les réels est a = b ou a = −b, obtenue en factorisant $a^2 - b^2$.

B - Variations. Étudiez $f(x) = x^3$ sur les réels. **Correction :** $f'(x) = 3x^2 \geq 0$; la fonction est strictement croissante, malgré f'(0) = 0. On peut aussi comparer directement deux cubes. L'annulation ponctuelle de la dérivée n'impose pas un extremum.

C - Primitive. Trouvez une primitive de 2x sur les réels, puis l'intégrale de 2x entre 0 et 3. **Correction :** $F(x) = x^2$ convient puisque F' = 2x. L'intégrale vaut F(3) − F(0) = 9. Ajouter une constante à F ne change pas cette différence.

D - Définition. Calculez la médiane de 2 ; 3 ; 8 ; 11. **Correction :** la liste est ordonnée et comporte quatre valeurs ; la médiane usuelle est la moyenne des deux valeurs centrales, (3 + 8)/2 = 5,5. La moyenne arithmétique de la série est 6 : les deux indicateurs ne répondent pas exactement à la même question.

10. Réviser une démarche, pas seulement un résultat

Pour chaque exercice, demandez-vous : quel domaine, quelle propriété, quelles hypothèses, quelle transformation et quelle conclusion ? Refaire le calcul avec d'autres valeurs permet de vérifier que la méthode ne dépend pas d'un exemple appris par cœur. Expliquer oralement pourquoi une étape est autorisée révèle souvent une compréhension encore fragile.

Une copie lisible distingue les données, le raisonnement et l'interprétation. Des connecteurs comme « puisque », « donc » et « réciproquement » doivent correspondre à un lien logique réel. Conservez un carnet d'erreurs comportant une correction et un contre-exemple ; une liste de formules seule ne montre pas quand les employer.

11. Quantificateurs : dire exactement ce que la preuve affirme

« Pour tout x, il existe y » et « il existe y tel que pour tout x » ne disent pas la même chose. Si chaque élève peut trouver un livre qui lui convient, le livre peut varier selon l'élève. Cela n'établit pas l'existence d'un même livre convenant à tous. En mathématiques, la différence apparaît dans les propriétés de fonctions : pour tout réel x, il existe un réel y tel que $y > x$; il n'existe pas un réel y supérieur à tous les réels x. Le premier énoncé se prouve en choisissant $y = x + 1$; le second est réfuté en prenant $x = y + 1$ quel que soit le candidat proposé.

Pour nier « tous les termes sont positifs », il suffit d'affirmer qu'au moins un terme ne l'est pas. La négation de $u_n > 0$ est $u_n \leq 0$, et non $u_n < 0$. Une égalité peut être le contre-exemple manquant. À l'inverse, nier « il existe une solution » signifie qu'aucune valeur du domaine ne satisfait l'équation. Cette dernière assertion demande

une preuve couvrant tout le domaine ; ne pas avoir trouvé de solution sur une calculatrice n'est pas une telle preuve.

Dans une rédaction, annoncez l'objet arbitraire : « soit x un réel strictement positif ». Ce choix n'impose aucune valeur particulière et permet de démontrer une propriété générale dans le domaine. Lorsqu'une constante dépend de x, dites-le. Les quantificateurs empêchent ainsi de transformer une construction adaptée à un cas en une promesse uniforme. C'est une précision utile pour les seuils de convergence, les probabilités et les problèmes d'optimisation.

12. Choisir entre preuve directe, contraposée et contradiction

Une preuve directe part des hypothèses et obtient la conclusion. Pour démontrer que $x > 1$ implique $x^2 > x$, on écrit $x^2 - x = x(x - 1)$, puis on constate que les deux facteurs sont positifs. La contraposée exprime le même lien dans un autre sens : si $x^2 \leq x$, alors $x \leq 1$. Il faut conserver la négation exacte et le domaine. La réciproque « si $x^2 > x$, alors $x > 1$ » est fausse, car $x = -1$ satisfait l'hypothèse sans la conclusion.

Le raisonnement par contradiction suppose temporairement la négation de la conclusion et cherche une incompatibilité avec les hypothèses ou une propriété déjà établie. Il ne suffit pas d'obtenir une phrase surprenante. Par exemple, pour montrer qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel, supposons qu'un tel entier N existe. L'entier $N + 1$ appartient encore aux naturels et lui est supérieur : c'est la contradiction recherchée. Le raisonnement fournit en plus une explication, car on sait construire un contre-candidat à tout prétendu maximum.

Une solution peut employer plusieurs méthodes, mais chaque transition doit être identifiable. Commencer par « supposons la propriété vraie » sans préciser si l'on prépare une récurrence, une

contraposée ou une contradiction laisse le lecteur deviner le rôle de l'hypothèse. Une preuve réussie expose ce rôle plutôt qu'une succession de calculs déjà connus de son auteur.

Exercice complémentaire. Pour des réels a et b, on affirme : « si ab = 0, alors a = 0 ». Trouvez une correction précise. **Correction :** a = 2 et b = 0 constituent un contre-exemple. La conclusion valable est a = 0 ou b = 0. Si l'on ajoute b ≠ 0 aux hypothèses, la conclusion a = 0 devient correcte par division. La propriété n'était pas entièrement absurde ; elle avait perdu une hypothèse ou une alternative indispensable. Apprendre à réparer un énoncé développe davantage la compréhension que classer seulement une phrase comme vraie ou fausse.

Chapitre 2 - Suites et récurrence : comprendre une évolution discrète

Repère historique - Fibonacci : une récurrence naît d'hypothèses

Le Liber abaci de Léonard de Pise, dit Fibonacci, date de 1202 et contient un problème fictif de reproduction de lapins associé à la suite portant aujourd'hui son nom. L'intérêt pour notre chapitre est le passage d'hypothèses à une règle de récurrence, puis l'examen de ce que cette règle permet de conclure. Un tel modèle ne devient pas une prévision biologique par le seul fait que ses premiers termes se calculent facilement. Ce jalon ne signifie ni que Fibonacci a inventé toutes les suites de cette forme ni que chaque phénomène naturel suit cette récurrence.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/

1. Identifier l'indice et la règle d'évolution

Une suite est une fonction définie sur un ensemble d'entiers, souvent les entiers naturels. L'indice n n'est pas la valeur u_n : il repère une étape. Lorsque u_n décrit une quantité après n opérations, u_0 décrit l'état avant la première opération. Une erreur de départ décale toute l'interprétation sans forcément rendre les calculs visiblement faux. Commencez donc par une phrase expliquant l'indice et la condition initiale.

Une définition explicite, comme u_n = 3n + 2, permet de calculer directement le terme d'indice 100. Une définition par récurrence, comme u_(n+1) = 0,8u_n + 5, demande une valeur initiale et construit l'évolution pas à pas. La deuxième écriture ne permet pas de remplacer u_n par n : u_(n+1) = 0,8n + 5 serait une autre suite.

La règle agit sur la valeur présente, pas directement sur le numéro de l'étape.

Une table des premiers termes et une représentation graphique peuvent suggérer un comportement. Elles aident à repérer un signe ou une borne possible, mais ne constituent pas une preuve pour une infinité de termes. Une calculatrice peut aussi masquer une divergence lente ou une oscillation très faible par ses arrondis. Les observations orientent donc la recherche ; les arguments algébriques et les théorèmes établissent le résultat.

2. Suites arithmétiques : un ajout constant

Une suite arithmétique vérifie u_(n+1) = u_n + r, où r est une constante appelée raison. Pour un premier terme u_0, sa forme explicite est u_n = u_0 + nr. On peut le démontrer par récurrence : le cas n = 0 est immédiat ; si la formule vaut à l'indice n, alors u_(n+1) = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r. La propriété est ainsi transmise au terme suivant.

Le signe de r détermine les variations : positive, la raison produit une croissance stricte ; négative, une décroissance stricte ; nulle, une suite constante. Une augmentation constante de 5 unités est différente d'une augmentation de 5 %. Dans le premier cas, on ajoute 5 ; dans le second, on multiplie par 1,05. Cette distinction doit être comprise avant de chercher une formule, surtout lorsque le vocabulaire ordinaire emploie dans les deux cas « augmentation régulière ».

La somme de N termes consécutifs d'une suite arithmétique est N fois la moyenne du premier et du dernier terme. Pour les termes u_0 à u_n inclus, leur nombre est n + 1 ; la somme vaut (n + 1)(u_0 + u_n)/2. Une démonstration consiste à écrire la somme dans l'ordre direct puis inverse : chaque paire de termes correspondants

a la même somme u_0 + u_n. Cette preuve explique le facteur 1/2 et évite de confondre dernier indice et nombre de termes.

Exemple fictif : une série de longueurs vaut 4 ; 7 ; 10 ; ... ; 34. La raison est 3. On résout 4 + 3n = 34, donc n = 10 et il y a onze termes, pas dix. La somme est 11×(4 + 34)/2 = 209. Vérifier les petits cas constitue un contrôle utile : pour n = 0, la formule doit redonner u_0, et non zéro.

3. Suites géométriques : un facteur constant

Une suite géométrique vérifie u_(n+1) = qu_n. Si elle commence à l'indice zéro et si q ≠ 0, sa forme explicite est u_n = u_0q^n pour n ≥ 0. Lorsque q = 0, on conserve le terme initial u_0 donné, puis u_n = 0 pour tout n ≥ 1 ; cette écriture séparée évite de faire intervenir 0^0. Le facteur q peut être positif, nul ou négatif ; sa valeur et le signe de u_0 doivent être examinés avant d'annoncer des variations. Pour u_0 > 0 et q > 1, la suite croît. Pour u_0 > 0 et 0 < q < 1, elle décroît vers zéro. Un facteur négatif provoque une alternance de signe lorsque u_0 n'est pas nul.

Une diminution de 20 % à chaque étape correspond à q = 0,80. Après deux étapes, la valeur est multipliée par 0,80² = 0,64 : la diminution totale est 36 %, et non 40 %. Les pourcentages successifs s'appliquent à des bases différentes. Une quantité fictive initiale de 60 unités devient 48, puis 38,4. L'exemple est un exercice de calcul, pas une prévision d'évolution économique, biologique ou médicale.

Pour q différent de 1, la somme 1 + q + ... + q^n vaut (1 − q^(n+1))/(1 − q). Pour l'établir, multipliez la somme S par q, puis soustrayez : S − qS = 1 − q^(n+1). La division est licite car q ≠ 1. Pour q = 1, la somme vaut simplement n + 1. Séparer ce cas n'est pas une formalité : la formule précédente aurait un dénominateur nul.

La somme des termes u_0 à u_n est donc u_0(1 − q^(n+1))/(1 − q). Pour u_0 = 2 et q = 1/2, les quatre premiers termes donnent 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = 3,75. La formule donne 2(1 − (1/2)^4)/(1/2) = 3,75. Ce contrôle confirme à la fois le nombre de termes et l'exposant n + 1.

4. Récurrence : formuler une propriété transmissible

Une preuve par récurrence concerne une proposition P(n) pour chaque entier d'un domaine. Elle comporte une initialisation, une hérédité et une conclusion. Dans l'hérédité, on fixe un entier n arbitraire du domaine, on suppose P(n) et on démontre P(n + 1). On ne suppose pas en même temps la conclusion à tous les indices. Le rôle de l'hypothèse est local et conditionnel.

La forme de P(n) mérite parfois d'être renforcée. Pour démontrer seulement u_n < 5, il peut être plus utile de démontrer 0 ≤ u_n < 5, car une borne inférieure permet ensuite d'appliquer une racine ou de conserver un signe. Renforcer une hypothèse de récurrence ne consiste pas à ajouter arbitrairement ce qui arrange le calcul : il faut prouver toutes ses composantes au départ et dans le passage au rang suivant.

Voici une preuve originale d'une identité : pour tout n ≥ 0, 1 + 3 + ... + (2n + 1) = (n + 1)². Au rang zéro, le membre gauche vaut 1 et le droit aussi. Supposons l'identité au rang n. Au rang n + 1, on ajoute le terme 2n + 3 : (n + 1)² + 2n + 3 = n² + 4n + 4 = (n + 2)². L'égalité est transmise. Une représentation de carrés emboîtés peut illustrer cette croissance, mais la démonstration algébrique couvre tous les indices.

Les erreurs fréquentes sont une initialisation au mauvais indice, un calcul qui n'utilise jamais l'hypothèse et une conclusion sans domaine. Une propriété comme 2^n ≥ n peut avoir des preuves courtes ; cela ne justifie pas de supprimer les étapes. La rédaction

peut être concise tout en restant complète : identifier le cas initial et montrer explicitement le passage suffisent souvent.

5. Étudier les variations sans méthode automatique

Pour comparer deux termes consécutifs, on peut étudier u_(n+1) − u_n. Une différence positive à tout indice établit une croissance. Si tous les termes sont strictement positifs, on peut également étudier le quotient u_(n+1)/u_n et le comparer à 1. La positivité est indispensable à cette seconde stratégie ; un quotient négatif ou un terme nul exige une autre analyse.

Une fonction associée peut aussi aider. Pour u_n = f(n), si f est croissante sur un intervalle contenant les indices étudiés, la suite est croissante. La réciproque n'est pas une règle générale : une fonction peut varier entre les entiers sans empêcher ses seules valeurs entières d'être croissantes. Ne remplacez donc pas une suite par une fonction en affirmant une équivalence sans justification.

Considérons u_n = n/(n + 1), pour n ≥ 0. La différence est (n + 1)/(n + 2) − n/(n + 1) = 1/[(n + 1)(n + 2)] > 0. La suite croît et reste strictement inférieure à 1. L'expression u_n = 1 − 1/(n + 1) donne une seconde approche immédiate. Les deux méthodes montrent des structures différentes : une comparaison locale entre voisins et une distance explicite à la limite.

6. Récurrence affine : déplacer l'origine des valeurs

Pour u_(n+1) = au_n + b, avec a ≠ 1, la valeur fixe L résout L = aL + b, donc L = b/(1 − a). Poser v_n = u_n − L transforme la relation en v_(n+1) = av_n. Ainsi u_n = L + (u_0 − L)a^n. La nouvelle variable mesure l'écart au point fixe ; elle rend la structure géométrique visible.

Prenons u_0 = 10 et u_(n+1) = 0,75u_n + 3. Le point fixe est 12 et u_n = 12 − 2(0,75)^n. La suite est croissante, reste sous 12 et converge vers 12. Si l'on choisissait u_0 = 14 avec la même règle, on obtiendrait 12 + 2(0,75)^n : une décroissance vers la même limite. La règle seule n'impose donc pas toujours le sens de variation ; la condition initiale le détermine aussi.

Avec a = −1/2 et L = 4, l'écart alterne de signe et sa valeur absolue diminue. La suite peut converger sans être monotone. Avec a = 2, un écart initial non nul est multiplié par deux à chaque étape et s'éloigne du point fixe. Pourtant, si u_0 = L, la suite est constante. Dire « a > 1 implique toujours divergence » oublierait ce cas exceptionnel. Le chapitre sur les limites précisera ces distinctions.

7. Une suite définie par une racine

Étudions u_0 = 0 et u_(n+1) = sqrt(u_n + 2). Il faut d'abord garantir que tous les termes sont définis. Montrons par récurrence 0 ≤ u_n ≤ 2. Cette propriété vaut au départ. Si elle vaut au rang n, alors 2 ≤ u_n + 2 ≤ 4, donc sqrt(2) ≤ u_(n+1) ≤ 2. L'expression reste définie et le terme suivant respecte la borne annoncée.

La fonction f(x) = sqrt(x + 2) est croissante sur [0 ; 2]. Comme u_1 = sqrt(2) > u_0, une récurrence donne u_(n+1) ≥ u_n : si u_n ≥ u_(n−1), appliquer f conserve l'inégalité. On peut aussi comparer f(x) et x pour 0 ≤ x ≤ 2. Les deux quantités sont positives ; f(x) ≥ x équivaut alors à x + 2 ≥ x², soit (x − 2)(x + 1) ≤ 0, propriété vraie sur cet intervalle.

La suite est croissante et majorée : le théorème de convergence monotone assure qu'elle admet une limite finie. En utilisant la continuité de la racine, cette limite L vérifie L = sqrt(L + 2). Comme L est dans [0 ; 2], on peut élever au carré et obtenir L² − L − 2 = 0. Les candidats sont 2 et −1 ; seul 2 appartient au domaine.

L'équation du point fixe ne suffisait pas à prouver la convergence, et son domaine élimine une solution algébrique parasite.

8. Seuils, nombres entiers et algorithmes

Pour la quantité fictive u_n = 60(0,80)^n, cherchons le premier indice où u_n < 5. On obtient (0,80)^n < 1/12. Le logarithme est croissant sur les positifs, donc n ln(0,80) < ln(1/12). Diviser par ln(0,80), qui est négatif, inverse l'inégalité : n > ln(1/12)/ln(0,80), soit environ 11,136. Le premier entier admissible est 12.

La vérification finale établit la minimalité : u_11 vaut environ 5,154, donc ne respecte pas le seuil strict ; u_12 vaut environ 4,123, donc le respecte. Un arrondi numérique de n à l'entier le plus proche serait ici une mauvaise méthode. La question demande un entier satisfaisant une inégalité, pas une approximation symétrique d'un nombre réel.

Un algorithme peut procéder sans logarithme : initialiser n = 0 et u = 60, puis tant que u ≥ 5, remplacer u par 0,80u et n par n + 1. L'état u = 60(0,80)^n est un invariant de boucle. La convergence vers zéro assure ici que le seuil finira par être atteint. Pour une autre suite, une boucle similaire pourrait ne jamais s'arrêter ; il faut donc discuter sa terminaison, pas seulement sa syntaxe.

9. Exercices corrigés

A - Décalage. Une suite arithmétique commence par u_1 = 7 et a pour raison 4. **Correction :** u_n = 7 + 4(n − 1), pour n ≥ 1. Le terme u_6 vaut 27. Écrire 7 + 4n compterait une augmentation supplémentaire. La somme des six premiers termes est 6(7 + 27)/2 = 102.

B - Quotient. La suite u_n = (−1/2)^n est-elle décroissante ? **Correction :** non ; ses termes alternent autour de zéro. Sa valeur absolue (1/2)^n décroît et tend vers zéro. Le quotient des termes

vaut −1/2 et n'autorise pas le critère fondé sur la comparaison à 1 pour des termes positifs.

C - Formule affine. u_0 = 3 et u_(n+1) = 2u_n − 1. **Correction :** L = 1, puis u_n = 1 + 2×2^n. Le premier terme retrouvé est bien 3 ; le suivant vaut 5. La suite diverge vers +∞. Une solution de L = 2L − 1 n'est pas automatiquement la limite de toutes les suites définies par cette règle.

D - Borne insuffisante. « Une suite majorée converge. » **Correction :** (−1)^n est majorée mais ne converge pas. Ses deux sous-suites d'indices pairs et impairs ont des limites différentes, ce qui rend impossible une limite commune. Une hypothèse suffisante serait que la suite soit croissante et majorée : le théorème de convergence monotone assure alors une limite finie. Une suite seulement décroissante et majorée pourrait tendre vers −∞, comme u_n = −n ; la monotonie sans préciser son sens et la borne adaptée ne suffit donc pas.

10. Révision et références

Sachez produire une formule explicite à partir d'une relation affine, démontrer une borne par récurrence et justifier le premier indice d'un seuil. Pour chaque résultat, distinguez observation, preuve des variations, preuve de convergence et identification de la limite. Ces étapes répondent à des questions différentes et peuvent demander des arguments différents.

Le cadre de progression est le programme officiel publié de spécialité mathématiques de Terminale : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm, annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Tous les exemples, démonstrations développées et exercices sont rédigés de manière originale LFDP. Aucune série de données réelles, prévision de rendement ou reproduction de sujet d'examen n'est présentée.

Chapitre 3 - Limites : établir un comportement sans confondre calcul et preuve

Repère historique - Cauchy : contrôler les conditions de l'analyse

Le Cours d'analyse de Cauchy paraît en 1821 pour l'enseignement de l'École polytechnique. Il appartient à l'effort historique de formulation rigoureuse des résultats de l'analyse. Le lien utile avec ce chapitre est l'attention aux conditions : reconnaître une expression ou observer une tendance ne suffit pas à autoriser une opération sur les limites. Les outils modernes présentés ici se lisent avec leur domaine et leurs hypothèses. Ce repère situe une étape de l'histoire ; il ne confond pas toutes les formulations de Cauchy avec les définitions et théorèmes actuels.

Source historique : Bibliothèque nationale de France - notice bibliographique : https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073247 ; University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/

1. Ce que signifie se rapprocher d'une valeur

Une suite converge vers L lorsque ses termes finissent par rester aussi proches de L qu'on le souhaite. Plus précisément, pour toute précision $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que, pour tout $n \geq N$, $|u_n - L| < \varepsilon$. Le rang peut dépendre de la précision demandée. Il ne suffit pas qu'un terme soit très proche de L : tous les termes suivants doivent satisfaire la condition à partir d'un certain rang.

Cette formulation explique pourquoi une limite n'est pas nécessairement une valeur atteinte. Pour $u_n = 1 - 1/(n + 1)$, aucun terme n'est égal à 1, mais l'écart vaut $1/(n + 1)$ et devient arbitrairement petit. À l'inverse, une suite peut prendre

exactement une même valeur à une infinité d'indices sans converger vers elle : (−1)^n vaut 1 à tous les indices pairs et −1 aux impairs. La fréquence d'une valeur ne remplace pas une propriété portant sur tous les grands indices.

Une suite ne peut avoir deux limites finies différentes. Pour comprendre l'idée, si L et M sont distincts, choisissez des voisinages de rayon inférieur au tiers de |L − M|. Ils sont disjoints. Les termes ne peuvent pas être tous à la fois dans chacun de ces voisinages à partir d'un même grand rang. Cette unicité autorise à parler de « la limite », mais seulement après avoir établi son existence.

2. Une première preuve à partir de la définition

Pour u_n = 1/(n + 1), montrons la convergence vers zéro. L'écart à zéro est exactement 1/(n + 1). Pour une précision ε > 0, choisir un entier N tel que N + 1 > 1/ε garantit que, pour tout n ≥ N, 1/(n + 1) < ε. La preuve répond directement à la définition et montre comment construire un rang adapté. Elle ne repose pas sur un dessin qui semble approcher l'axe.

Pour u_n = 3 + 2/(n + 1), la limite est 3 puisque |u_n − 3| = 2/(n + 1). Un rang vérifiant N + 1 > 2/ε convient. Le coefficient modifie la vitesse à laquelle une précision est atteinte, pas la limite. Deux suites peuvent avoir la même limite et des écarts très différents à chaque étape ; il ne faut pas confondre destination et rythme de convergence.

Les exercices de Terminale n'exigent pas toujours cette rédaction formelle. Comprendre les quantificateurs reste utile pour juger un argument. « Pour ε = 0,01, les termes sont proches » démontre au mieux une précision particulière. La convergence concerne toute précision positive, même beaucoup plus exigeante. « Il existe un

rang où l'écart est petit » oublie aussi que la propriété doit se maintenir après ce rang.

3. Divergence vers l'infini et absence de limite

Une suite tend vers +∞ lorsque, pour toute borne réelle A, tous les termes sont supérieurs à A à partir d'un certain rang. L'infini n'est pas un nombre auquel le dernier terme serait égal ; une suite n'a généralement pas de dernier terme. Le symbole décrit un comportement. La définition de −∞ est analogue avec des termes finalement inférieurs à toute borne.

La suite 2n + 1 tend vers +∞ : il suffit de choisir N assez grand pour que 2N + 1 > A. La suite $-n^2$ tend vers −∞. En revanche, (−1)^n n ne tend ni vers +∞ ni vers −∞ : ses termes alternent entre de grandes valeurs positives et négatives. Elle n'a pas non plus de limite finie. Le mot « divergente » peut donc désigner plusieurs situations qu'une conclusion précise doit distinguer.

Une suite non bornée ne tend pas nécessairement vers +∞. Il faut examiner tous les grands indices, pas seulement quelques valeurs très élevées. De même, une suite bornée ne converge pas forcément : l'alternance entre −1 et 1 suffit à le montrer. Ces contre-exemples donnent un bon carnet de révision, car ils empêchent d'utiliser un théorème amputé de ses hypothèses.

4. Opérations sur les limites et formes indéterminées

Si u_n et v_n convergent vers des limites finies L et M, leur somme converge vers L + M et leur produit vers LM. Si M ≠ 0 et si le quotient est défini à partir d'un certain rang, u_n/v_n converge vers L/M. La condition sur le dénominateur est essentielle. Les règles usuelles permettent de simplifier une étude lorsqu'elles s'appliquent ; elles ne constituent pas une arithmétique libre sur les symboles infinis.

Les formes $\infty - \infty$, $0\times\infty$, ∞/∞ et $0/0$ sont indéterminées : les seules limites séparées ne permettent pas de conclure. Par exemple, n^2/n tend vers $+\infty$, n/n tend vers 1 et n/n^2 tend vers zéro ; les trois quotients ont la même forme ∞/∞. De même, $(n + 1) - n$ vaut 1, tandis que $n^2 - n$ tend vers $+\infty$. L'absence de conclusion automatique ne signifie pas absence de méthode.

Il faut transformer l'expression, mettre en évidence un terme dominant, factoriser ou rationaliser. Les transformations doivent respecter les domaines. Les règles de calcul deviennent ensuite applicables à une expression mieux adaptée. Chercher immédiatement une valeur numérique très grande peut suggérer la réponse, mais ne remplace pas le raisonnement et peut même masquer une erreur d'arrondi.

5. Termes dominants dans un quotient

Pour $u_n = (3n^2 - 2n + 5)/(2n^2 + n + 1)$, divisez numérateur et dénominateur par n^2 pour $n \geq 1$. On obtient $[3 - 2/n + 5/n^2]/[2 + 1/n + 1/n^2]$. Chaque terme en $1/n$ ou $1/n^2$ tend vers zéro ; le dénominateur tend vers 2, non nul. La limite vaut donc 3/2. L'argument ne consiste pas à supprimer des termes parce qu'ils paraissent petits : il établit précisément qu'ils tendent vers zéro dans l'expression normalisée.

Si le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur, le quotient peut diverger avec un signe déterminé par les termes dominants. S'il est plus petit, il peut tendre vers zéro. Pour $(-2n^3 + n)/(n^2 + 4)$, la division par n^2 donne $(-2n + 1/n)/(1 + 4/n^2)$, donc une divergence vers $-\infty$. La lecture du signe est indispensable ; dire seulement « degré plus grand donc infini » ne suffit pas.

Les mêmes transformations s'utilisent pour les fonctions lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Pour $x \to -\infty$, le signe des puissances

impaires change. Une formule étudiée uniquement pour les indices naturels ne doit pas être prolongée sans examen à des réels négatifs, notamment si elle contient une racine, un logarithme ou une puissance non entière.

6. Rationaliser une différence de racines

Considérons u_n = sqrt(n² + n) − n pour n ≥ 1. Les deux termes tendent vers +∞ et leur différence est indéterminée. Multiplier par l'expression conjuguée donne u_n = n/[sqrt(n² + n) + n]. En divisant par n, qui est positif, on obtient 1/[sqrt(1 + 1/n) + 1]. La limite vaut 1/2. La rationalisation transforme une soustraction délicate en quotient dont les limites sont immédiatement exploitables.

Le signe de n a été utilisé dans sqrt(n²) = |n| = n. Pour une variable x tendant vers −∞, écrire sqrt(x²) = x serait faux. Par exemple, sqrt(x² + x) − x se comporte alors comme −2x et tend vers +∞, dans le domaine où la racine est définie. La même apparence algébrique n'impose pas la même limite aux deux extrémités de l'axe.

Sur une calculatrice, une grande valeur de n peut rendre sqrt(n² + n) et n si proches relativement qu'une partie de leur différence est perdue par arrondi. La forme rationalisée est souvent plus stable numériquement. Ce lien entre raisonnement symbolique et fiabilité numérique montre qu'une simplification n'est pas seulement une commodité de copie : elle peut améliorer la qualité du calcul effectif.

7. Comparaison et encadrement

Le théorème d'encadrement affirme que, si a_n ≤ u_n ≤ b_n à partir d'un certain rang et si a_n et b_n ont la même limite finie L, alors u_n converge vers L. La condition « même limite » est essentielle. Encadrer une suite entre 0 et 1 ne démontre pas sa convergence ; cela établit seulement une borne.

Pour u_n = (−1)^n/(n + 1), on a −1/(n + 1) ≤ u_n ≤ 1/(n + 1). Les deux bornes tendent vers zéro, donc la suite converge vers zéro. Elle n'est pas monotone, mais son oscillation diminue. Cet exemple distingue nettement convergence et monotonie. Une majoration de la valeur absolue, |u_n| ≤ 1/(n + 1), fournit la même conclusion avec une notation plus compacte.

Pour les limites infinies, une comparaison suffit parfois. Si u_n ≥ v_n à partir d'un certain rang et si v_n tend vers +∞, alors u_n tend aussi vers +∞. Ainsi 5n + (−1)^n ≥ 5n − 1 montre une divergence vers +∞ malgré une petite oscillation. Une borne supérieure tendant vers +∞ ne permettrait pas la même conclusion : elle laisserait encore possible une suite constante ou décroissante.

8. Suites monotones bornées et point fixe

Une suite croissante et majorée converge vers une limite finie. Une suite décroissante et minorée converge également. Les bornes ne donnent pas nécessairement la valeur de cette limite. Si u_n ≤ 10, rien ne permet de conclure que sa limite est 10. La convergence est assurée par le théorème ; l'identification demande un argument supplémentaire.

Pour une relation u_(n+1) = f(u_n), si la suite converge vers L et si f est continue au point L, alors L = f(L). Cette équation fournit des candidats. Elle ne prouve ni la convergence ni l'absence d'autres candidats. La suite u_(n+1) = 2u_n avec u_0 = 1 diverge, bien que l'équation L = 2L possède la solution L = 0. L'existence d'un point

fixe ne signifie pas que toutes les trajectoires l'atteignent ou l'approchent.

Un autre piège est de choisir une borne seulement pour faciliter le calcul. La borne doit être démontrée à chaque rang. Pour une suite croissante, vérifier $u_0 < 5$ ne garantit pas que tous les termes restent sous 5. Une récurrence ou une expression explicite doit établir cette conservation de l'intervalle avant d'invoquer le théorème de convergence monotone.

9. Limites de fonctions et limites latérales

Pour une fonction, x peut approcher une valeur a sans lui être égal. La limite de f(x) lorsque x tend vers a concerne les valeurs voisines dans le domaine. Pour $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, définie pour $x \neq 1$, on factorise et obtient $f(x) = x + 1$ sur ce domaine. La limite en 1 vaut 2 alors que f(1) n'est pas définie. On peut construire un prolongement continu en attribuant la valeur 2 en ce point ; c'est une nouvelle définition, non une valeur déjà présente.

Les limites à gauche et à droite peuvent différer. Pour $f(x) = 1/(x - 2)$, le dénominateur est négatif lorsque x approche 2 par valeurs inférieures et positif par valeurs supérieures. La limite à gauche est $-\infty$, celle à droite $+\infty$. La droite $x = 2$ est une asymptote verticale, mais il n'existe pas de limite infinie unique sans préciser le côté.

Pour $f(x) = 2 + 1/x$, la limite en $+\infty$ vaut 2 : $y = 2$ est une asymptote horizontale dans cette direction. La courbe n'est pas obligée de rester d'un seul côté d'une asymptote horizontale pour toute fonction. Une asymptote exprime un écart qui tend vers zéro, pas une barrière matérielle que la courbe ne pourrait jamais traverser.

Une asymptote oblique peut être reconnue en montrant $f(x) - (ax + b) \to 0$. Pour $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, la division donne $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. Le dernier terme tend vers zéro à l'infini ; $y = x + 1$ est

donc une asymptote oblique. La fonction elle-même ne converge pas vers un nombre fini. L'écart à une droite et la valeur de la fonction sont deux objets différents.

10. Exponentielle et croissance comparée

Pour $0 < q < 1$, q^n tend vers zéro. Une justification accessible utilise $1/q = 1 + h$ avec $h > 0$. L'inégalité de Bernoulli $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, démontrable par récurrence, donne $0 < q^n \leq 1/(1 + nh)$. La borne supérieure tend vers zéro. Si $-1 < q < 0$, la valeur absolue est $|q|^n$ et le même encadrement assure encore une convergence vers zéro, malgré l'alternance.

Lorsque $q > 1$, q^n tend vers $+\infty$. Pour les fonctions, les résultats usuels de croissance comparée disent notamment que $\ln(x)/x \to 0$ lorsque $x \to +\infty$ et que l'exponentielle domine les puissances à $+\infty$. Ici ces résultats sont des propriétés de cours à connaître ; ils ne sont pas « prouvés » par un tableau de valeurs. On peut les mobiliser pour $e^x/x^2 \to +\infty$ ou $x^2e^{-x} \to 0$, après avoir examiné le domaine et réécrit le produit en quotient.

Il n'est pas nécessaire d'introduire une règle avancée de dérivation des quotients de limites pour traiter tous ces cas. Employer un résultat non encore étudié sans justification peut cacher les hypothèses et la méthode attendue. Les factorisations, comparaisons et propriétés de cours offrent déjà une large gamme de raisonnements adaptés à la Terminale.

11. Exercices corrigés

A - Quotient. Trouvez la limite de $(4n^2 + 3)/(n^2 - n + 2)$. **Correction :** division par n^2 : $[4 + 3/n^2]/[1 - 1/n + 2/n^2] \to 4$. Le dénominateur tend vers 1, ce qui autorise la règle du quotient.

B - Alternance amortie. $u_n = 7 + (-1)^n/n$ pour $n \geq 1$. **Correction :** $|u_n - 7| = 1/n \to 0$, donc $u_n \to 7$. La suite n'est pas monotone ; cette absence n'empêche pas la convergence.

C - Conjuguée. $v_n = \sqrt{n^2 + 4n} - n$. **Correction :** $v_n = 4/[\sqrt{1 + 4/n} + 1]$, donc la limite est 2. Le facteur 4 n'est pas supprimé : il reste au numérateur après la normalisation.

D - Limite et valeur. $f(x) = x + 2$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 10$. **Correction :** la limite en zéro vaut 2, mais la valeur vaut 10. La fonction n'est pas continue en zéro. Les valeurs voisines déterminent la limite ; la valeur choisie au point détermine aussi la continuité.

E - Point fixe. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -u_n$. **Correction :** les termes alternent entre 2 et -2. L'équation $L = -L$ donne 0, mais la suite ne converge pas. On ne peut passer à la limite dans une relation avant d'avoir établi ou supposé explicitement l'existence de cette limite.

12. Révision et références

Pour chaque étude, annoncez la direction ou le côté de la limite, contrôlez le domaine et recherchez une éventuelle forme indéterminée. Choisissez ensuite une transformation, puis un théorème dont les hypothèses sont vérifiées. Une conclusion distingue limite finie, divergence vers un infini et absence de limite. Les arrondis et les graphes sont des contrôles, pas des remplaçants de ces étapes.

Cadre de progression : programme officiel publié de spécialité mathématiques de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et son annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Exemples, preuves développées et exercices originaux LFDP ; aucun texte de manuel, figure ou sujet d'examen tiers reproduit.

Chapitre 4 - Continuité : prouver une existence, une unicité et un encadrement

Repère historique - Bolzano : une existence demande une preuve

Dans un mémoire de 1817, Bernard Bolzano donne une démonstration du théorème des valeurs intermédiaires en recherchant une justification analytique. Ce fait éclaire la différence entre voir une courbe traverser un niveau et établir l'existence d'une solution sous des hypothèses précises. Notre chapitre applique cette distinction à la continuité, puis sépare existence, unicité et approximation numérique. Le jalon historique ne remplace pas la démonstration et ne permet pas d'oublier une hypothèse ; il invite justement à demander pourquoi le résultat est valable.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

1. Trois questions à ne pas confondre

Lorsqu'une équation f(x) = k apparaît, trois questions se présentent : possède-t-elle au moins une solution, en possède-t-elle une seule et comment approcher cette solution ? Une calculatrice qui affiche un nombre répond parfois à la troisième sans avoir répondu aux deux premières. Une preuve d'existence ne fournit pas nécessairement une expression exacte. Une preuve d'unicité ne démontre pas automatiquement qu'une solution existe. Séparer ces questions rend la résolution plus sûre et plus lisible.

La continuité joue un rôle central pour l'existence. La monotonie stricte peut assurer l'unicité sur un intervalle. Une méthode

numérique construit ensuite un encadrement ou une approximation. Le raisonnement complète donc le calcul : il indique ce que celui-ci cherche et pourquoi il peut réussir. On ne doit pas présenter le dernier nombre affiché comme une solution exacte si l'algorithme n'a fourni qu'une valeur approchée.

Le domaine fait partie du problème. Une fonction contenant une racine ou un logarithme impose des restrictions ; un dénominateur peut exclure un point. Le théorème des valeurs intermédiaires exige la continuité sur tout l'intervalle étudié. Vérifier seulement les valeurs aux deux extrémités ne remplace pas cette condition. Une discontinuité ou un point absent peut empêcher l'argument de fonctionner.

2. Continuité en un point et sur un intervalle

Une fonction f est continue en un point a de son domaine lorsque la limite de f(x) quand x tend vers a est f(a), avec l'approche adaptée au domaine. Cette définition relie les valeurs voisines à la valeur au point. Si f(a) n'est pas définie, on ne peut pas affirmer sa continuité en a ; on peut éventuellement construire un prolongement après avoir étudié la limite.

Les fonctions polynomiales sont continues sur les réels. Une fonction rationnelle est continue là où son dénominateur ne s'annule pas. L'exponentielle est continue sur les réels ; le logarithme sur les réels strictement positifs. Des sommes, produits et compositions de fonctions continues sont continues dans leurs domaines appropriés. Le quotient exige un dénominateur non nul. Cette boîte à outils permet de justifier la continuité sans revenir à sa définition pour chaque exercice.

L'image intuitive d'un tracé « sans lever le crayon » est utile mais limitée. Elle dépend de l'échelle du dessin et ne constitue pas une définition générale. Une courbe calculée avec quelques points peut

masquer un trou ou une variation très rapide. Inversement, une fonction définie par morceaux peut être continue si les valeurs et les limites se raccordent correctement. Le nom de la formule ne décide pas à lui seul de la propriété.

3. Raccordement d'une fonction par morceaux

Prenons $f(x) = x^2$ pour $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ pour $x > 1$. À gauche de 1, la limite vaut 1 ; la valeur $f(1)$ vaut également 1. À droite, la limite vaut $a + b$. La continuité en 1 exige donc $a + b = 1$. Il existe une infinité de couples satisfaisant cette condition. Demander la continuité seule ne détermine pas forcément tous les paramètres.

Si l'on impose aussi la dérivabilité au raccord, la dérivée à gauche vaut 2 et celle à droite a ; il faut $a = 2$, puis $b = -1$. Cette condition supplémentaire répond à une question distincte. Une fonction peut être continue sans être dérivable, comme $|x|$ en zéro. Son graphe ne présente pas de saut, mais les pentes à gauche et à droite sont différentes.

Dans une modélisation, la continuité peut exprimer qu'une grandeur ne change pas instantanément de valeur au passage d'un seuil. La dérivabilité peut exprimer une transition de pente. Il faut néanmoins justifier ces propriétés par le problème réel ; elles ne sont pas des exigences esthétiques universelles. Un tarif défini par paliers, par exemple, peut volontairement présenter des sauts. Un modèle doit décrire ce qui est pertinent, pas seulement une courbe agréable à regarder.

4. Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur un intervalle fermé [a ; b], toute valeur k comprise entre f(a) et f(b) est atteinte au moins une fois sur cet intervalle. Pour chercher une racine, on prend k = 0. Si f(a) et f(b) sont de signes opposés, la continuité garantit au moins un c tel que f(c) = 0. Si l'une des valeurs est déjà nulle, l'extrémité correspondante est elle-même une solution.

Le théorème affirme une existence, pas nécessairement une unicité. Pour $f(x) = x^2 - 1$ sur $[-2 ; 2]$, les valeurs aux extrémités sont toutes deux positives ; pourtant la fonction a deux racines. Le changement de signe aux extrémités est une condition suffisante pour une racine dans le cas usuel, pas une condition nécessaire à toute existence de racine. Il ne faut pas déduire « aucun changement de signe, donc aucune solution ».

La continuité est indispensable. Une fonction égale à -1 pour $x < 0$ et à 1 pour $x \geq 0$ change de signe entre -1 et 1 sans prendre la valeur zéro. La fonction 1/x présente aussi des signes opposés de part et d'autre de zéro, mais elle n'est pas définie sur tout cet intervalle. Ces exemples réfutent une version incorrecte du théorème qui ne conserverait que les signes aux extrémités.

5. Ajouter l'unicité par la monotonie

Si f est strictement monotone sur un intervalle, elle ne peut prendre une même valeur à deux points différents de cet intervalle. Ainsi, continuité et encadrement d'une valeur donnent l'existence, tandis que monotonie stricte donne l'unicité. Les justifications peuvent être courtes, mais leurs rôles doivent rester distincts dans la rédaction.

Étudions f(x) = e^x − 3x sur [0 ; 1]. La fonction est continue, f(0) = 1 et f(1) = e − 3 < 0. Il existe donc une racine dans]0 ; 1[. Sa dérivée f'(x) = e^x − 3 est strictement négative sur [0 ; 1],

puisque e^x ≤ e < 3. La fonction est strictement décroissante ; la racine y est unique. Aucune expression élémentaire exacte n'est nécessaire pour établir ces deux résultats.

Sur un intervalle plus large, la même équation peut avoir une autre solution. Ici $f(1) < 0$ et $f(2) = e^2 - 6 > 0$ garantissent au moins une racine entre 1 et 2. L'unicité démontrée sur [0 ; 1] ne signifie donc pas unicité sur tous les réels. Le domaine de la conclusion doit être annoncé aussi soigneusement que le domaine de la fonction.

Une dérivée strictement positive partout est une condition suffisante de croissance stricte, pas une condition nécessaire. La fonction x^3 est strictement croissante bien que sa dérivée s'annule en zéro. Pour $a < b$, la différence $b^3 - a^3 = (b - a)(a^2 + ab + b^2)$ est positive : le premier facteur est positif et le second ne peut être nul pour deux réels distincts. Cet argument algébrique évite une généralisation abusive à partir d'un seul point de dérivée nulle.

6. Image d'un intervalle et extrema

La continuité assure que l'image d'un intervalle ne présente pas de valeur manquante entre deux valeurs atteintes. Elle ne signifie pas que les valeurs extrêmes sont forcément celles des deux bornes. Pour $f(x) = x^2$ sur $[-2 ; 3]$, les valeurs aux bornes sont 4 et 9, mais la valeur zéro est atteinte en $x = 0$. L'image est [0 ; 9], pas [4 ; 9]. Il faut étudier les variations ou les extrema pour connaître toute l'image.

Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint un minimum et un maximum. Ce résultat ne se transpose pas sans examen à un intervalle ouvert. La fonction $f(x) = x$ sur $]0 ; 1[$ est bornée mais n'atteint ni zéro ni un ; elle n'a donc ni minimum ni maximum sur ce domaine. Les bornes inférieure et supérieure existent comme nombres, sans être forcément des valeurs de la fonction.

Cette distinction est utile pour l'optimisation. Un calcul peut désigner une valeur située hors du domaine ou sur une borne exclue. La réponse doit alors dire s'il existe un maximum atteint ou seulement une borne supérieure approchable. Remplacer un intervalle ouvert par un intervalle fermé pour simplifier l'étude change le problème ; cette modification doit être justifiée, et non faite silencieusement.

7. Dichotomie : conserver un invariant

La dichotomie cherche une racine d'une fonction continue dans un intervalle où les valeurs aux extrémités ont des signes opposés. On calcule le milieu m = (a + b)/2. Si f(m) = 0 exactement, le problème est résolu. Sinon on conserve la moitié où les extrémités gardent des signes opposés. Chaque étape divise par deux la longueur de l'intervalle et préserve l'existence d'au moins une racine dans l'intervalle retenu.

Le changement de signe est l'invariant logique de la méthode. Si la racine est unique, les intervalles successifs l'encadrent toujours. Après N divisions d'un intervalle initial de longueur L, la longueur est L/2^N. En prenant le milieu final comme approximation, l'erreur absolue est au plus L/(2^(N+1)), sous les hypothèses exactes du modèle mathématique. Les deux critères « largeur » et « erreur du milieu » doivent être distingués.

Pour obtenir une largeur inférieure ou égale à 0,001 à partir d'un intervalle de longueur 1, il faut 2^N ≥ 1000, donc N = 10 divisions suffisent : 1/1024 ≈ 0,0009766. Neuf divisions donnent environ 0,001953 et ne suffisent pas. Le comptage dépend du moment où l'on mesure la largeur ; annoncer une initialisation et une étape clairement évite un décalage d'un rang.

8. Une première exécution expliquée

Reprenons f(x) = e^x − 3x sur [0 ; 1], où la racine est unique. Au milieu 0,5, f vaut environ 0,1487, donc elle est positive. Comme f(1) est négative, on conserve [0,5 ; 1]. Le nouveau milieu 0,75 donne environ −0,1330, donc on conserve [0,5 ; 0,75]. Au milieu 0,625, f vaut environ −0,00675 ; on conserve [0,5 ; 0,625].

L'intervalle ne doit pas être choisi parce que le milieu « paraît proche » de zéro. Le signe et la continuité justifient la moitié retenue. Une petite valeur de f(m) ne garantit pas à elle seule que m soit très proche de la racine : si la fonction est presque plate, un écart horizontal important peut correspondre à un petit écart vertical. L'encadrement fournit une information géométrique différente du résidu f(m).

Un programme peut utiliser le test « mêmes signes » entre f(a) et f(m). En calcul exact, un produit positif indique ce cas. En calcul flottant, des valeurs extrêmement grandes ou petites peuvent déborder ou être arrondies à zéro ; comparer les signes séparément peut être plus robuste. Cette remarque n'exige pas de maîtriser toute l'analyse numérique, mais invite à ne pas confondre une opération informatique et une preuve exacte.

9. Autres méthodes et raisons de comparer

La méthode de Newton utilise la tangente : x_(n+1) = x_n − f(x_n)/f'(x_n), lorsque le dénominateur n'est pas nul. Elle peut converger très vite dans de bonnes conditions, mais un mauvais point initial peut conduire à une divergence, un cycle ou une valeur hors du domaine. Elle est présentée ici comme un éclairage complémentaire, pas comme un remplacement automatique de la méthode de dichotomie ou des attentes de l'enseignant.

Pour f(x) = x³ − 2x + 2 et x_0 = 0, Newton donne x_1 = 0 − 2/(−2) = 1. Puis f(1) = 1 et f'(1) = 1, donc x_2 = 0. Les valeurs alternent

entre 0 et 1 sans approcher une racine. Un logiciel qui s'arrête après quelques itérations peut afficher un nombre sans avoir obtenu la solution. Une méthode plus rapide en situation favorable n'est donc pas une méthode universellement plus fiable.

La dichotomie est lente en comparaison de certaines méthodes locales, mais son encadrement est simple à garantir si les hypothèses sont respectées. On peut combiner méthodes, par exemple utiliser un encadrement sûr et une étape plus rapide contrôlée. Cette comparaison illustre une idée générale : l'efficacité numérique, les garanties mathématiques et la facilité de vérification sont des critères distincts.

10. D'une équation à une inégalité

Une racine peut organiser le signe d'une fonction. Si f est strictement décroissante sur [a ; b] et possède une unique racine α dans cet intervalle, f est positive avant α et négative après. Résoudre f(x) ≥ 0 sur [a ; b] donne alors [a ; α]. La racine peut être décrite exactement comme « l'unique solution de... » même si l'on n'en connaît qu'un encadrement décimal.

Pour f(x) = e^x − 3x sur [0 ; 1], le résultat précédent fournit cette organisation du signe. On ne remplace pas α par une approximation arrondie dans une réponse dite exacte. Il est possible de donner d'abord l'ensemble exact avec α, puis un encadrement pour l'interprétation. Cette séparation évite d'inclure ou d'exclure des valeurs proches du seuil sur la seule base d'un arrondi.

Une fonction non monotone demande un tableau de signes plus complet. Plusieurs racines peuvent découper le domaine en plusieurs intervalles ; les signes ne sont pas toujours alternés lorsqu'une racine est multiple. Par exemple, $(x - 1)^2$ s'annule en 1

sans devenir négative. Le théorème d'existence et les racines ne remplacent donc pas l'étude de la structure de l'expression.

11. Exercices corrigés

A - Continuité au raccord. $f(x) = 2x + 1$ pour $x < 2$ et $f(x) = x^2 + c$ pour $x \geq 2$. **Correction :** la limite gauche en 2 vaut 5 ; la valeur et la limite droite valent $4 + c$. La continuité exige $c = 1$. Cela n'assure pas la dérivabilité : les dérivées au raccord seraient 2 et 4.

B - Existence. $P(x) = x^3 - 4x + 1$. Montrez une racine entre 0 et 1. **Correction :** le polynôme est continu, $P(0) = 1$ et $P(1) = -2$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure au moins une racine. Sur $[0 ; 1]$, $P'(x) = 3x^2 - 4 < 0$, ce qui assure son unicité dans cet intervalle. Cette conclusion ne porte pas sur tous les réels.

C - Nombre de divisions. L'intervalle initial a une largeur 8. Quelle largeur obtient-on après six divisions ? **Correction :** 8/2^6 = 0,125. Le milieu a une erreur maximale de 0,0625 par rapport à toute racine encore encadrée. La valeur de la fonction au milieu n'a pas été utilisée pour cette borne d'erreur.

D - TVI mal appliqué. $f(x) = 1/x$ et $f(-1)f(1) < 0$. **Correction :** la fonction n'est pas continue sur $[-1 ; 1]$, puisqu'elle n'est pas définie en zéro. Le théorème ne s'applique pas. Il n'existe d'ailleurs aucune racine de $1/x$ sur son domaine.

E - Unicité mal déduite. Une fonction continue a $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Possède-t-elle exactement une racine ? **Correction :** pas nécessairement ; elle peut traverser l'axe plusieurs fois. Il faut une propriété supplémentaire, telle qu'une stricte monotonie sur l'intervalle, ou une autre démonstration d'unicité.

12. Révision et références

Pour vous entraîner, rédigez séparément les paragraphes d'existence, d'unicité et d'approximation. Dans le premier, vérifiez la continuité et les valeurs extrêmes ; dans le deuxième, justifiez la propriété empêchant deux solutions ; dans le troisième, annoncez l'invariant et la précision. Reconstituez ensuite un exemple où chacune des hypothèses manquantes fait échouer une conclusion.

Le programme officiel publié de spécialité mathématiques de Terminale fournit le cadre de progression : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Les situations, formulations et exercices sont originaux LFDP. Le complément sur Newton éclaire les limites d'une méthode numérique ; il ne constitue ni une exigence d'examen annoncée ni une garantie de fonctionnement d'un logiciel.

Chapitre 5 - Dérivation et optimisation : passer d'une variation locale à une conclusion

Repère historique - Leibniz : calculer les variations, puis les justifier

En 1684, Leibniz publie dans les Acta Eruditorum un article sur son calcul différentiel, avec des règles de dérivation et la notation d. La biographie institutionnelle signale aussi que cet article ne présentait pas les démonstrations de ces règles. Pour réviser aujourd'hui, une règle opératoire reste donc à distinguer des raisons et des conditions qui la rendent valable. Le chapitre associe calcul de la dérivée, domaine et interprétation du signe. Cette date est un repère de publication, sans attribution exclusive de l'invention du calcul infinitésimal.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

1. Comprendre la dérivée avant de l'utiliser

Le quotient $[f(a + h) - f(a)]/h$ mesure une variation moyenne entre deux points pour $h \neq 0$. Si ce quotient possède une limite finie quand h tend vers zéro, f est dérivable en a et cette limite est $f'(a)$. La dérivée exprime ainsi une information locale : elle décrit la variation au voisinage d'un point, pas nécessairement l'évolution globale sur tout le domaine.

Géométriquement, $f'(a)$ est la pente de la tangente au graphe au point de coordonnées $(a ; f(a))$. Son équation est $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. L'équation contient à la fois la pente et un point ; écrire seulement $y = f'(a)x$ oublie en général l'ordonnée à l'origine. Une

tangente horizontale signifie f'(a) = 0 ; elle ne signifie pas automatiquement que f(a) = 0.

Si f représente une distance en mètres et x une durée en secondes, la dérivée a l'unité m/s. Si f représente une aire en m² en fonction d'une longueur en m, sa dérivée a l'unité m. La dérivation change donc les unités suivant la variable. Cette cohérence permet de repérer une confusion entre une fonction et sa dérivée dans un problème appliqué.

2. Dérivabilité et approximation locale

Une fonction dérivable en un point y est continue, mais la réciproque est fausse. La fonction |x| est continue en zéro et ne possède pas de dérivée en ce point, car les taux de variation à gauche et à droite tendent vers −1 et 1. La continuité raccorde les valeurs ; la dérivabilité demande en plus une variation locale compatible avec une pente unique.

Lorsque f est dérivable en a, on peut écrire f(a + h) = f(a) + f'(a)h + un reste qui devient négligeable devant h. L'approximation affine f(a + h) ≈ f(a) + f'(a)h est donc locale. Elle n'est pas une égalité générale et sa précision dépend de la fonction et de la taille de h. Pour f(x) = x² autour de a = 2, on obtient f(2 + h) = 4 + 4h + h² : le reste est explicitement h².

Pour h = 0,10, l'approximation donne 4,40 et la valeur exacte 4,41. Pour h = 1, elle donne 8 contre 9. Une même formule linéaire devient moins précise quand on s'éloigne du point. Sans connaissance ou borne du reste, on ne peut pas transformer une tangente en garantie d'erreur numérique. Cette prudence relie le concept local à son usage dans les calculs approchés.

3. Règles de dérivation et domaines

Pour deux fonctions dérivables u et v, la dérivée d'une somme est u' + v'. Celle d'un produit est u'v + uv', pas u'v'. Pour un quotient u/v défini avec v ≠ 0, la dérivée est (u'v − uv')/v². La constante multiplicative est conservée : (ku)' = ku'. Les domaines doivent être déterminés avant ou en même temps que le calcul.

Pour une composée g(u(x)), la dérivée est g'(u(x))u'(x). Le facteur u' correspond à la variation de l'expression intérieure. Ainsi (e^(3x²))' = 6x e^(3x²). Pour ln(u(x)), avec u(x) > 0, la dérivée est u'/u. Pour sqrt(u(x)), la formule u'/(2sqrt(u)) est utilisable aux points où u > 0 et où les autres hypothèses de dérivabilité sont satisfaites. Une expression définie à un point n'y est pas nécessairement dérivable.

Considérons f(x) = ln(x² + 1). Son domaine est tous les réels, puisque x² + 1 > 0, et f'(x) = 2x/(x² + 1). Pour g(x) = ln(x² − 1), le domaine est]−∞ ; −1[∪]1 ; +∞[. La formule g'(x) = 2x/(x² − 1) ressemble à la précédente, mais les domaines sont différents. Un calcul formel correct sur une expression ne dispense pas de définir où il est autorisé.

4. Du signe de la dérivée aux variations

Sur un intervalle où f est dérivable, une dérivée positive ou nulle assure une fonction croissante ; une dérivée négative ou nulle assure une fonction décroissante. Une dérivée strictement positive assure une croissance stricte. Les formulations exactes et les éventuels points isolés de dérivée nulle doivent être examinés avant de conclure à la stricte monotonie. Une étude complète peut employer un tableau de signes et des arguments complémentaires.

Le rôle de l'intervalle est important. Une fonction rationnelle peut avoir une dérivée de même signe sur deux morceaux de domaine

séparés par une valeur interdite ; cela ne suffit pas à la déclarer monotone sur leur réunion. Pour f(x) = 1/x, la dérivée est négative sur chaque intervalle]−∞ ; 0[et]0 ; +∞[. Pourtant comparer x = −1 et x = 1 sur l'ensemble disjoint montre f(−1) < f(1), ce qui ne correspond pas à une décroissance globale.

La dérivée nulle en un point ne garantit pas un extremum. Pour x³, la dérivée s'annule en zéro mais la fonction continue de croître. Un changement de signe de f' de positif à négatif produit un maximum local ; le changement inverse produit un minimum local. Il faut ensuite comparer avec les autres valeurs candidates pour qualifier un maximum ou minimum global sur le domaine demandé.

5. Une étude complète de fonction

Prenons f(x) = (x + 1)e^(−x). Elle est définie et dérivable sur les réels. Par la règle du produit, f'(x) = e^(−x) − (x + 1)e^(−x) = −xe^(−x). Comme l'exponentielle est toujours positive, le signe de la dérivée est celui de −x. La fonction est strictement croissante sur]−∞ ; 0] et strictement décroissante sur [0 ; +∞[. Son maximum global vaut f(0) = 1.

À +∞, le produit (x + 1)e^(−x) tend vers zéro par croissance comparée, en restant positif pour x > −1. À −∞, x + 1 tend vers −∞ et e^(−x) vers +∞ ; le produit tend vers −∞. La fonction s'annule en x = −1. Ces informations organisent un graphe cohérent : passage par (−1 ; 0), montée vers (0 ; 1), puis décroissance vers l'asymptote horizontale y = 0 à droite.

Si le problème impose x dans [0 ; 4], le maximum reste 1 et le minimum est f(4) = 5e^−4, environ 0,0916. Le résultat sur un domaine restreint doit être étudié avec ses bornes. Un point critique globalement pertinent peut être exclu par une contrainte ; à l'inverse, une borne peut devenir le lieu d'un optimum même si la dérivée n'y est pas nulle.

6. Construire une fonction objectif sous contrainte

L'optimisation commence avant la dérivée. Il faut définir la quantité à optimiser, les variables, leurs unités et les contraintes. Pour une boîte ouverte de base carrée de côté x et de hauteur h, un volume imposé V donne $x^2h = V$, donc $h = V/x^2$ pour $x > 0$. La surface de matière idéale est $A = x^2 + 4xh$, soit $A(x) = x^2 + 4V/x$. Le fond et les quatre faces sont comptés ; il n'y a pas de couvercle dans ce modèle.

Pour $V = 32$ dm³, $A(x) = x^2 + 128/x$ en dm², avec x en dm. Sa dérivée vaut $A'(x) = 2x - 128/x^2 = 2(x^3 - 64)/x^2$. Le dénominateur est positif, donc la dérivée est négative pour $0 < x < 4$ et positive pour $x > 4$. La surface minimale est obtenue pour $x = 4$ dm ; la hauteur est alors $32/16 = 2$ dm et la surface vaut $16 + 32 = 48$ dm².

Il faut ensuite interpréter les contraintes réelles données par l'exercice. Si x devait appartenir à [2 ; 3], la valeur 4 serait inadmissible et A serait décroissante sur tout cet intervalle : le minimum y serait à $x = 3$. Un calcul d'optimum sans domaine fournit une réponse à un problème inachevé. Épaisseur, découpe, résistance et pertes de matière sont absentes du modèle ; la boîte fictive n'est pas un plan de fabrication certifié.

7. Optimisation locale et globale

Un minimum local signifie que les valeurs voisines sont plus grandes ou égales ; un minimum global compare à toutes les valeurs du domaine. Une fonction peut posséder plusieurs extrema locaux. Chercher $f' = 0$ fournit des candidats intérieurs, non une liste universelle des extrema : des points non dérivables et des bornes doivent aussi être examinés selon le domaine.

Pour $f(x) = x^2$ sur $[-1 ; 2]$, le minimum est en zéro et le maximum en 2. La dérivée en 2 vaut 4, non zéro. Le maximum est situé à une

borne du domaine ; aucune contradiction n'existe avec la condition usuelle sur un extremum intérieur dérivable. Pour |x| sur [−1 ; 1], le minimum est en zéro alors que la fonction n'y est pas dérivable. Ces deux exemples délimitent clairement les hypothèses.

Le vocabulaire « candidat » est donc utile. On établit les points critiques, les bornes et les éventuelles singularités admissibles, puis on compare leurs valeurs ou leurs variations. Pour un domaine non borné, il faut aussi examiner les limites. Une fonction peut admettre une borne supérieure sans la prendre : f(x) = 1 − e^(−x) sur [0 ; +∞[s'approche de 1 mais n'y est jamais égale.

8. Dérivée et mouvement : distance ou déplacement ?

Une position fictive est x(t) = 12t − t³ pour t dans [0 ; 3], avec les coefficients et unités adaptés. La vitesse est v(t) = 12 − 3t² et l'accélération a(t) = −6t. La vitesse est positive avant t = 2 s, nulle à cette date, puis négative. La position augmente jusqu'à x(2) = 16 m, puis diminue jusqu'à x(3) = 9 m.

Le déplacement entre les dates zéro et trois secondes est 9 m. La distance parcourue vaut 16 + (16 − 9) = 23 m, parce qu'il y a un changement de sens. Dériver la position et étudier le signe de la vitesse permet donc de résoudre une question géométrique sur le trajet. Employer seulement x(3) − x(0) comme distance oublierait la phase de retour.

Le signe de l'accélération ne dit pas directement si la rapidité augmente ou diminue. Avant le demi-tour, v > 0 et a < 0 : la norme de la vitesse diminue. Après, v < 0 et a < 0 : elle augmente. Ce lien avec la physique montre pourquoi les signes et les vecteurs doivent être interprétés, pas seulement calculés. La dérivée fournit une relation ; le sens des variables fournit la réponse au problème.

9. Vérifier une dérivée par plusieurs contrôles

Une vérification peut utiliser la structure, le signe attendu et une différence numérique. Pour f(x) = e^(−2x), une dérivée positive serait suspecte puisque la fonction décroît. La formule correcte est −2e^(−2x). Pour un polynôme, le degré de la dérivée diminue d'une unité si le terme dominant n'est pas constant. Pour une fonction composée, cherchez explicitement le facteur intérieur souvent oublié.

Un quotient de différences avec un petit h peut contrôler une valeur de dérivée : [f(a + h) − f(a)]/h doit approcher f'(a). Il ne prouve pas la formule sur tout le domaine et peut subir des erreurs d'arrondi lorsque h est trop petit. Une différence centrale [f(a + h) − f(a − h)]/(2h) peut être utile, mais exige que les deux points appartiennent au domaine.

La cohérence dimensionnelle reste un autre contrôle. Dans un problème de surface en fonction d'une longueur, une dérivée annoncée en m² plutôt qu'en m révèle une erreur de représentation ou d'unité. Une vérification indépendante ne consiste pas à recopier le même calcul avec les mêmes étapes : cherchez une propriété ou une méthode susceptible de détecter un autre type d'erreur.

10. Exercices corrigés

A - Produit et composée. Dérivez f(x) = x²e^(3x) sur les réels. **Correction :** f' = 2xe^(3x) + 3x²e^(3x) = xe^(3x)(2 + 3x). Le facteur 3 vient de l'expression intérieure. Les zéros de la dérivée sont 0 et −2/3 ; leur nature demande encore un tableau de signes.

B - Quotient. Dérivez g(x) = (x + 1)/(x − 2). **Correction :** le domaine exclut 2 et g' = [(x − 2) − (x + 1)]/(x − 2)² = −3/(x − 2)². La fonction est décroissante sur chaque intervalle de son domaine,

sans qu'on puisse en déduire une décroissance globale sur leur réunion.

C - Tangente. Pour $f(x) = x^2 + 1$, donnez la tangente en $a = -1$. **Correction :** $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -2$, donc $y = 2 - 2(x + 1) = -2x$. La droite passe bien par $(-1 ; 2)$. Une pente négative ne signifie pas que l'ordonnée du point soit négative.

D - Extrema. Étudiez $h(x) = x^3 - 3x$ sur $[-2 ; 2]$. **Correction :** $h' = 3(x^2 - 1)$, positive hors de $[-1 ; 1]$ et négative à l'intérieur. Les valeurs candidates sont $h(-2) = -2$, $h(-1) = 2$, $h(1) = -2$ et $h(2) = 2$. Le maximum global 2 est atteint en deux points et le minimum -2 également. Un extremum global n'est pas forcément unique.

E - Domaine. Dérivez $k(x) = \ln(2 - x)$. **Correction :** le domaine est $x < 2$ et $k' = -1/(2 - x)$. La fonction est strictement décroissante sur ce domaine. Écrire $1/(2 - x)$ oublierait la dérivée intérieure ; étudier $x > 2$ oublierait le domaine réel du logarithme.

F - Approximation. Estimez $(3{,}02)^2$ par une tangente à x^2 en 3, puis donnez l'écart exact. **Correction :** l'approximation est $9 + 6 \times 0{,}02 = 9{,}12$. La valeur exacte est 9,1204 ; l'écart vaut $(0{,}02)^2 = 0{,}0004$. Le calcul du reste est possible ici parce que la fonction est connue explicitement.

11. Révision et références

Une révision utile comporte quatre gestes : déterminer le domaine, dériver avec la bonne structure, étudier les signes sur des intervalles, puis interpréter les extrema et les contraintes. Refaites une dérivation sans formulaire et expliquez chaque facteur. Pour l'optimisation, vérifiez que la fonction objectif représente bien toutes les quantités comptées, puis que la solution appartient au domaine admissible.

Référence de progression : programme publié de spécialité mathématiques de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm ; annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Toutes les explications et situations sont originales LFDP, sans sujet d'examen ou texte de manuel reproduit. Les applications servent la compréhension des méthodes et ne certifient aucune installation, fabrication ou prévision réelle.

Chapitre 6 - Convexité : comparer une courbe, ses cordes et ses tangentes

Repère historique - Jensen : la convexité permet de comparer

Johan Ludwig Jensen publie en 1906 dans Acta Mathematica une inégalité relative aux fonctions convexes. Ce jalon donne un contexte à l'idée centrale de ce chapitre : la forme d'une fonction impose des comparaisons entre des valeurs, des cordes et des tangentes. Nous travaillons ici avec les propriétés démontrées et les critères accessibles au niveau visé, sans faire de l'inégalité générale de Jensen un résultat exigible supplémentaire. L'histoire rappelle l'utilité de la convexité ; une illustration ou un nom célèbre ne dispense jamais de vérifier l'intervalle et les hypothèses.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jensen/

1. Une propriété différente des variations

Les variations indiquent si les valeurs d'une fonction augmentent ou diminuent. La convexité décrit une autre structure : la position de sa courbe par rapport aux cordes qui relient deux de ses points. Une fonction convexe peut être décroissante, puis croissante, ou décroissante sur tout son domaine. Il est donc incorrect d'employer « convexe » comme synonyme de « croissante ».

Pour f(x) = (x − 1)², la fonction décroît jusqu'à 1 puis croît, mais elle est convexe sur tous les réels. Pour f(x) = e^(−x), elle est décroissante et convexe. Ces exemples séparent deux questions que le dessin peut parfois faire confondre. Dans une étude complète, le signe de f' renseigne sur les variations ; l'évolution de f' et, lorsqu'elle existe, le signe de f'' renseignent sur la convexité.

L'intérêt est concret. La convexité permet de comparer des valeurs sans calculer exactement chacune, d'encadrer une fonction par des droites et de justifier certaines inégalités. Elle éclaire aussi l'optimisation : pour une fonction convexe dérivable, un point intérieur où la dérivée s'annule est un minimum global sur l'intervalle considéré. Il reste indispensable de vérifier que ce point appartient au domaine du problème.

2. Définition par les cordes

Une fonction f est convexe sur un intervalle I si, pour tous a et b de I et tout λ dans [0 ; 1], on a $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$. Le point $(1 - \lambda)a + \lambda b$ se trouve entre a et b. Le membre droit est l'ordonnée du point correspondant sur la corde du graphe. La courbe est donc située sous cette corde.

Pour une fonction concave, l'inégalité est inversée. Une fonction affine est à la fois convexe et concave, puisque la courbe et toutes les cordes coïncident. La convexité stricte demande une inégalité stricte pour $a \neq b$ et $0 < \lambda < 1$. Cette précision permet de distinguer une structure générale d'une absence de segments affines.

Au milieu, $\lambda = 1/2$, la définition donne $f((a + b)/2) \leq [f(a) + f(b)]/2$. Pour $f(x) = x^2$, elle devient $((a + b)/2)^2 \leq (a^2 + b^2)/2$. En développant, l'écart entre membre droit et membre gauche vaut $(a - b)^2/4$, qui est positif ou nul. Cette preuve directe confirme une inégalité particulière et montre le rôle de l'écart entre a et b.

La moyenne des images n'est donc pas, en général, l'image de la moyenne. L'égalité automatique ne vaut que dans des situations particulières, notamment une fonction affine. Cette différence est utile dans les applications, mais une conclusion pratique demande aussi de vérifier que la fonction choisie représente réellement le phénomène étudié.

3. Critère de la dérivée et dérivée seconde

Sur un intervalle où f est dérivable, f est convexe si et seulement si f' est croissante. Si f est deux fois dérivable, une dérivée seconde positive ou nulle sur l'intervalle assure la convexité ; négative ou nulle, elle assure la concavité. La dérivée seconde exprime la variation de la pente. Une pente négative qui devient moins négative peut donc correspondre à une convexité.

Pour f(x) = e^(−x), f' = −e^(−x) est négative mais croissante, car f'' = e^(−x) > 0. La fonction baisse de moins en moins vite. Pour f(x) = ln(x), sur x > 0, f' = 1/x est positive mais décroissante et f'' = $-1/x^2 < 0$: le logarithme augmente, avec une pente qui diminue. Les variations et la convexité fournissent ainsi deux informations complémentaires.

Il faut étudier le signe sur un intervalle, pas en un seul point. Le fait que f''(a) > 0 donne une information locale si les conditions appropriées permettent de la prolonger, mais ne prouve pas une convexité sur tout le domaine. De même, la dérivée seconde peut ne pas exister en certains points d'une fonction pourtant convexe : |x| est un exemple. La définition par les cordes est plus générale que le critère pratique de la dérivée seconde.

4. Tangentes et preuve d'une inégalité

Pour une fonction convexe dérivable, la courbe est au-dessus de chacune de ses tangentes sur l'intervalle de convexité. Au point a, cela s'écrit f(x) ≥ f(a) + f'(a)(x − a). Pour une fonction concave, la courbe est en dessous. Les deux descriptions « sous les cordes » et « au-dessus des tangentes » ne se contredisent pas : une corde relie deux points distincts, une tangente décrit une pente locale.

Une justification du résultat pour une fonction convexe consiste à définir h(x) = f(x) − f(a) − f'(a)(x − a). Sa dérivée est f'(x) − f'(a). Puisque f' est croissante, h' est négative ou nulle avant a et

positive ou nulle après a. Ainsi h atteint son minimum en a, où h(a) = 0. On obtient h(x) ≥ 0. La preuve utilise les variations d'une fonction auxiliaire et donne un outil réutilisable.

Pour f(x) = e^x, la tangente en zéro est y = 1 + x. La convexité donne donc e^x ≥ 1 + x pour tout réel x. Cette inégalité est une borne, pas une approximation toujours précise. Pour x très négatif, la droite peut être négative tandis que l'exponentielle reste positive. Pour x proche de zéro, elle fournit une approximation locale dont l'erreur demande une étude supplémentaire.

5. Encadrer le logarithme

Le logarithme est concave sur les réels positifs. Sa tangente en 1 est y = x − 1. On obtient ln(x) ≤ x − 1 pour x > 0, avec égalité en 1. En remplaçant x par 1 + h, cela donne ln(1 + h) ≤ h pour h > −1. Le domaine est indispensable ; ln(1 + h) n'est pas réel si h ≤ −1.

Une autre tangente fournit une borne inférieure. Prenons la tangente à ln au point x > 0 et évaluons sa majoration au point 1 : ln(1) ≤ ln(x) + (1/x)(1 − x). Comme ln(1) = 0, on obtient ln(x) ≥ 1 − 1/x. Ensemble, les deux bornes donnent 1 − 1/x ≤ ln(x) ≤ x − 1 pour x > 0.

Pour x = 1,10, cet encadrement devient 0,090909... ≤ ln(1,10) ≤ 0,10. La valeur numérique est environ 0,09531. L'encadrement ne dépend pas de cette dernière valeur : il est démontré avant le calcul approché. Pour des x éloignés de 1, les bornes peuvent être peu serrées. Un encadrement valide n'est pas nécessairement le meilleur encadrement pour toute question.

6. Points d'inflexion : un changement de convexité

Un point d'inflexion est associé à un changement de convexité au voisinage d'un point de la courbe. Pour une fonction suffisamment régulière, un changement de signe de f'' de part et d'autre permet souvent de l'identifier. La seule égalité f''(a) = 0 ne suffit pas. Il faut examiner le signe ou la convexité autour du point et vérifier que le point appartient à la courbe.

Pour f(x) = x³, f''(x) = 6x change de signe en zéro : la fonction est concave à gauche et convexe à droite. L'origine est un point d'inflexion. Pour g(x) = x^4, g''(x) = 12x² s'annule en zéro mais reste positive de part et d'autre ; il n'y a pas de changement de convexité. Le point zéro est un minimum, pas un point d'inflexion.

Une valeur exclue du domaine ne peut pas être un point d'inflexion de la courbe, même si les signes de f'' sur deux intervalles séparés diffèrent. Pour 1/x, la dérivée seconde 2/x³ change de signe de part et d'autre de zéro, mais la fonction n'est pas définie en zéro. La conclusion correcte porte sur la convexité sur chacun des deux intervalles, pas sur un point inexistant.

7. Étude détaillée d'un polynôme

Considérons f(x) = x^4 − 4x³. Les dérivées sont f'(x) = 4x²(x − 3) et f''(x) = 12x(x − 2). Le signe de f'' est positif pour x < 0, négatif pour 0 < x < 2, puis positif pour x > 2. La fonction est donc convexe, puis concave, puis convexe sur ces intervalles. Les points de coordonnées (0 ; 0) et (2 ; −16) sont des points d'inflexion.

La dérivée première est négative pour x < 3, sauf son annulation ponctuelle en zéro, et positive pour x > 3. La fonction décroît jusqu'à 3 puis croît ; elle possède un minimum en x = 3, de valeur −27. Le point d'inflexion en zéro n'est donc pas un extremum. Le même graphe illustre pourquoi dérivée nulle, extremum et inflexion sont trois notions distinctes.

La tangente en 2 a pour pente f'(2) = −16 et passe par (2 ; −16). Son équation est y = −16 − 16(x − 2), soit y = −16x + 16. Vérifier la pente et le passage par le point est un contrôle essentiel. Au voisinage d'un point d'inflexion, la courbe change de position par rapport à cette tangente dans ce cas régulier ; on peut l'étudier directement en factorisant l'écart si la question le demande.

Pour la tangente en zéro, la pente et l'ordonnée sont nulles : c'est l'axe horizontal. Près de zéro, f(x) = x³(x − 4) est positive à gauche et négative à droite. La courbe traverse donc sa tangente dans cet exemple. Cette observation locale ne doit pas être transformée en un critère universel sans les hypothèses de régularité nécessaires.

8. Convexité et minimum global

Si f est convexe et dérivable sur un intervalle, et si f'(a) = 0 en un point intérieur a, l'inégalité de tangente donne f(x) ≥ f(a) pour tout x de l'intervalle. Le point a est donc un minimum global. Si f est strictement convexe, ce minimum est unique. La preuve explique pourquoi une propriété locale de pente peut ici produire une conclusion globale : la convexité apporte l'information supplémentaire.

Pour f(x) = x² + 8/x sur x > 0, f''(x) = 2 + 16/x³ > 0. La fonction est strictement convexe. Sa dérivée 2x − 8/x² s'annule lorsque x³ = 4, donc en a = racine cubique de 4. Ce point fournit l'unique minimum global. Il n'est pas nécessaire de refaire un long tableau de variations pour établir l'unicité, mais les limites ou le tableau peuvent servir de contrôle.

Si le domaine admissible est un sous-intervalle qui n'inclut pas a, il faut chercher le minimum sur ce domaine. La convexité ne rend pas une valeur interdite admissible. Une application exige donc deux étages : comprendre la fonction mathématique, puis respecter les contraintes du problème. Un optimum théorique ne

vaut pas validation d'une décision réelle dont les coûts ou risques n'ont pas été modélisés.

9. Moyennes et dispersion : une illustration originale

Prenons deux mesures a et b. La convexité du carré donne que le carré de leur moyenne est inférieur ou égal à la moyenne de leurs carrés. La différence vaut $(a - b)^2/4$. Pour $a = 2$ et $b = 6$, le carré de la moyenne est 16 et la moyenne des carrés 20 ; l'écart est 4. Cette différence est liée à la dispersion et disparaît uniquement lorsque les deux valeurs coïncident.

Pour plusieurs nombres avec des poids positifs de somme 1, une extension de l'inégalité de convexité compare la fonction de la moyenne pondérée à la moyenne pondérée des valeurs de la fonction. Cette extension, souvent appelée inégalité de Jensen, est donnée comme complément de compréhension ; elle n'est pas une exigence d'examen particulière annoncée. Elle se démontre par une application répétée de la définition à deux points.

La portée pratique dépend du modèle. Si une consommation fictive est proportionnelle au carré d'une vitesse, varier la vitesse autour d'une même moyenne peut augmenter la moyenne de cette consommation. Cela ne permet pas d'affirmer un bilan réel de véhicule sans prendre en compte durée, distance, accélérations et mécanismes effectifs. L'inégalité mathématique reste exacte ; son interprétation empirique exige des données supplémentaires.

10. Lire et construire un tableau de convexité

Une étude efficace commence par le domaine et les intervalles où les dérivées existent. On calcule f'', on factorise si possible et on étudie son signe. On en déduit les intervalles de convexité et de concavité, puis on vérifie les points candidats à une inflexion. Les coordonnées nécessitent encore le calcul de f aux abscisses retenues.

Ne mélangez pas le tableau de signe de f, celui de f' et celui de f''. Le premier décrit les valeurs positives ou négatives de la fonction, le deuxième les variations et le troisième, sous les conditions annoncées, la convexité. Une fonction négative peut être convexe ; une fonction positive peut être concave ; un point d'inflexion peut avoir une ordonnée non nulle. Les trois tableaux répondent à des questions différentes.

Sur un graphique, regarder si la pente augmente ou diminue peut aider. Cela reste un contrôle qualitatif, dépendant de l'échelle et de la précision du tracé. Un tableau fondé sur une expression exacte donne une justification plus solide. Si seul un document graphique est fourni, formulez les conclusions au niveau de précision autorisé et indiquez les hypothèses de lecture.

11. Exercices corrigés

A - Croissance et convexité. Étudiez ces deux propriétés pour $e^{(-2x)}$. **Correction :** $f' = -2e^{(-2x)} < 0$ et $f'' = 4e^{(-2x)} > 0$. La fonction est décroissante et strictement convexe. Les propriétés ne sont pas opposées.

B - Tangente au logarithme. Écrivez la tangente à $\ln(x)$ en 2 et comparez-la à la fonction. **Correction :** $y = \ln(2) + (x - 2)/2$. La concavité donne $\ln(x) \leq \ln(2) + (x - 2)/2$ pour $x > 0$. Le résultat porte sur tout le domaine de concavité, pas seulement sur un petit voisinage de 2.

C - Inflexion. f(x) = x^5. **Correction :** f''(x) = 20x³ change de signe en zéro. L'origine est un point d'inflexion. La dérivée première 5x^4 est positive ou nulle ; la fonction reste croissante, ce qui confirme que l'inflexion n'est pas un changement obligatoire de sens de variation.

D - Borne exponentielle. Montrez e^(2x) ≥ 1 + 2x. **Correction :** appliquer l'inégalité e^t ≥ 1 + t à t = 2x, ou utiliser la tangente en zéro de la fonction e^(2x). Les deux démarches produisent la même borne avec des hypothèses valables sur tous les réels.

E - Moyenne. Pour 1 et 5, comparez le carré de la moyenne et la moyenne des carrés. **Correction :** la moyenne est 3, son carré 9 ; la moyenne des carrés vaut (1 + 25)/2 = 13. L'écart 4 vaut (5 − 1)²/4. Remplacer une moyenne de carrés par un carré de moyenne aurait donc supprimé une information de dispersion.

F - Zéro de f''. Une fonction a f''(a) = 0. Peut-on conclure à une inflexion ? **Correction :** non. Il faut établir un changement de convexité. Le contre-exemple x^4 en zéro montre qu'un simple zéro de la dérivée seconde ne suffit pas.

12. Révision et références

Révisez la convexité par trois représentations : courbe sous les cordes, courbe au-dessus des tangentes et dérivée croissante. Sachez passer de l'une à une inégalité, puis en expliquer le domaine. Pour les points d'inflexion, contrôlez le changement de convexité et les coordonnées. Un carnet contenant les contre-exemples x^4, |x| et 1/x aide à conserver les hypothèses exactes.

Cadre de progression : programme officiel publié de spécialité mathématiques de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Démonstrations, exemples et exercices originaux LFDP. Les compléments sont explicitement

distingués d'une annonce de contenu d'épreuve ; aucun manuel ou sujet tiers n'est reproduit.

Chapitre 7 - Exponentielle, logarithme et trigonométrie : transformer sans perdre le domaine

Repère historique - Napier : transformer un calcul difficile

John Napier présente ses logarithmes dans un ouvrage de 1614, avec l'objectif de simplifier des calculs longs. Ses logarithmes ne sont pas identiques au logarithme naturel enseigné aujourd'hui. Le rapprochement utile est la transformation d'un problème : passer d'un produit à une somme peut rendre une relation plus facile à étudier, mais seulement lorsque les conditions du logarithme sont satisfaites. Le chapitre distingue donc les identités, leur domaine et leur usage dans les équations ou les modèles. Un outil de calcul gagne en puissance lorsque l'on comprend ce qu'il conserve et ce qu'il exige.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/

1. Trois familles et trois structures

L'exponentielle décrit notamment une variation proportionnelle à une valeur présente. Le logarithme transforme des rapports multiplicatifs en différences additives et permet d'inverser l'exponentielle sur les positifs. La trigonométrie représente des angles, des projections et des évolutions périodiques. Ces fonctions peuvent intervenir dans un même problème, mais elles n'obéissent pas aux mêmes identités ni aux mêmes domaines.

Une méthode fiable consiste à définir le domaine avant la transformation, puis à identifier la structure : produit, puissance, composée ou périodicité. Une ressemblance graphique ne suffit pas à choisir une loi. Une croissance exponentielle n'est pas une

croissance linéaire plus rapide ; une sinusoïde ne représente pas toute oscillation réelle ; un logarithme ne permet pas d'appliquer aux sommes les règles qu'il possède pour les produits.

Les arguments des fonctions demandent aussi une interprétation. Dans un modèle e^(kt), le produit kt doit être sans dimension. Si t est exprimé en secondes, k a une unité s^−1. Dans ln(q/q_0), le rapport de deux quantités de même unité est sans dimension. Écrire un logarithme d'une valeur numérique suppose une convention d'unité ou une normalisation ; changer arbitrairement l'unité peut sinon modifier la valeur calculée.

2. Exponentielle : propriétés et croissance

L'exponentielle est définie sur les réels, strictement positive et strictement croissante. Elle vérifie e^0 = 1, e^(a+b) = e^a e^b et e^(−a) = 1/e^a. Sa dérivée est elle-même ; pour e^(u(x)), la dérivée devient u'(x)e^(u(x)). Les propriétés algébriques permettent de transformer un produit ou un quotient, pas d'additionner les exposants dans une somme d'exponentielles.

Ainsi e^a + e^b n'est pas e^(a+b). Avec a = b = 0, le premier membre vaut 2 et le second 1. De même, e^(2x) = (e^x)², mais e^(x²) n'est pas (e^x)². L'emplacement des parenthèses décrit des fonctions différentes. Un contre-exemple simple peut détecter une identité douteuse avant qu'elle ne se propage dans tout un calcul.

Les limites sont e^x → +∞ quand x → +∞ et e^x → 0 quand x → −∞. L'exponentielle n'est jamais égale à zéro pour un réel fini. Une calculatrice affichant zéro pour une valeur très négative peut avoir atteint sa limite de représentation ; cet affichage n'est pas une nouvelle propriété mathématique.

3. Résoudre une équation exponentielle par substitution

Considérons e^(2x) − 5e^x + 6 = 0. Posons Y = e^x, avec Y > 0. L'équation devient Y² − 5Y + 6 = 0, soit (Y − 2)(Y − 3) = 0. Les deux candidats 2 et 3 respectent le domaine de Y. Comme l'exponentielle est bijective des réels vers les positifs, les solutions sont x = ln(2) et x = ln(3).

La substitution ne dispense pas du domaine. Si un autre polynôme fournissait une racine Y négative, elle ne correspondrait à aucun e^x réel. On résout d'abord l'équation algébrique, puis on filtre et on revient à la variable initiale. Ces étapes doivent apparaître dans la rédaction pour montrer que toutes les solutions, et seulement elles, ont été retenues.

Pour l'inégalité e^(2x) − 5e^x + 6 ≤ 0, le tableau de signes du polynôme donne 2 ≤ Y ≤ 3. La croissance du logarithme permet de conclure ln(2) ≤ x ≤ ln(3). Une équation fournit des points ; une inégalité fournit ici un intervalle. Réutiliser les deux seules racines comme ensemble solution de l'inégalité serait insuffisant.

4. Logarithme : inverse et règles exactes

Le logarithme népérien est défini sur les réels strictement positifs. Il est l'inverse de l'exponentielle : ln(e^x) = x pour tout réel x et e^(ln y) = y pour y > 0. Il est strictement croissant et sa dérivée vaut 1/x. Sa valeur en 1 est zéro ; il est négatif entre zéro et un et positif au-delà de un.

Pour a > 0 et b > 0, ln(ab) = ln(a) + ln(b). On peut le justifier en exponentiant la somme : e^(ln a + ln b) = ab, puis en utilisant l'unicité de l'antécédent par l'exponentielle. On obtient aussi ln(a/b) = ln(a) − ln(b). Pour une puissance entière d'une base positive, la règle se déduit par répétition ; pour une puissance réelle définie par a^r = e^(r ln a), elle donne ln(a^r) = r ln(a).

Les domaines ne se simplifient pas automatiquement avec la formule. Pour $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$, parce que $|x|$ est positif. Écrire $2\ln(x)$ exclurait les x négatifs alors que x^2 est positif. Pour $\ln(x) + \ln(y)$, les deux arguments doivent être positifs ; le seul fait que $xy > 0$ ne suffit pas si x et y sont tous deux négatifs.

5. Équations logarithmiques et vérification

Résolvons $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(8)$. Le domaine exige $x - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$, donc $x > 1$. Sur ce domaine, la somme devient $\ln(x^2 - 1)$. L'injectivité du logarithme donne $x^2 - 1 = 8$, soit $x^2 = 9$. Les candidats sont 3 et -3, mais seul 3 respecte le domaine initial.

Pour $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) \leq \ln(8)$, la croissance du logarithme donne $x^2 - 1 \leq 8$ sur $x > 1$. L'ensemble solution est $]1 ; 3]$. Il n'est pas $[-3 ; 3]$, car les arguments initiaux doivent rester positifs. Le domaine est une contrainte maintenue pendant toutes les transformations, pas une vérification facultative en fin de calcul.

Une équation $\ln(u(x)) = 0$ équivaut à $u(x) = 1$ si le logarithme est défini. Une équation $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ exige $u > 0$ et $v > 0$ avant de conclure $u = v$. Résoudre seulement $u = v$ peut introduire des points où les deux expressions sont négatives. La chaîne de résolution doit donc conserver les conditions de positivité.

6. Croissance multiplicative et seuil entier

Une évolution fictive qui augmente de 5 % à chaque étape suit $q_n = q_0(1{,}05)^n$ si le modèle et le pourcentage restent constants. Pour chercher le premier indice où $q_n \geq 2q_0$ avec $q_0 > 0$, on obtient $(1{,}05)^n \geq 2$, puis $n \geq \ln(2)/\ln(1{,}05)$, soit environ 14,21. Le premier entier admissible est 15.

La vérification donne $(1{,}05)^{14} \approx 1{,}980$ et $(1{,}05)^{15} \approx 2{,}079$. L'indice 14 ne suffit pas ; 15 suffit. Les deux comparaisons démontrent la minimalité dans le modèle. Ce raisonnement reste

purement mathématique : il ne prévoit aucun rendement, population ou capacité réelle sans validation de la règle d'évolution.

Pour une décroissance avec un facteur entre zéro et un, le logarithme du facteur est négatif et la division inverse le sens d'une inégalité. C'est le point critique de nombreux seuils. Une manière de vérifier la réponse consiste à tester les deux indices voisins dans l'expression initiale, plutôt que de faire confiance à une chaîne de signes copiée trop rapidement.

7. Logarithmes de base différente

Pour une base $a > 0$, $a \neq 1$, le logarithme de base a est $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$, pour $x > 0$. Il est croissant si $a > 1$ et décroissant si $0 < a < 1$. Le logarithme décimal correspond à $a = 10$. Le changement de base permet d'utiliser une calculatrice disposant seulement de ln ou log décimal.

Un rapport multiplié par 100 augmente son logarithme décimal de 2. Cette structure explique l'intérêt d'une échelle logarithmique pour comparer des ordres de grandeur. Si un niveau est défini par $10\log_{10}(I/I_0)$, multiplier I par 100 ajoute 20 au niveau, avec la même référence I_0. Cela ne signifie pas que la quantité physique a été multipliée par 20.

Une différence de logarithmes correspond à un logarithme de rapport. Une somme de niveaux logarithmiques ne représente donc pas automatiquement une addition de grandeurs physiques. Pour additionner des intensités, il faut revenir aux intensités puis appliquer la définition du niveau. L'interprétation de l'échelle est aussi importante que l'usage des touches de calcul.

8. Angles et cercle trigonométrique

Le radian mesure un angle par le rapport entre la longueur d'un arc et le rayon du cercle. Un tour complet correspond à 2π radians, soit 360°. Un demi-tour vaut π radians et un angle droit π/2. Les dérivées usuelles de sin et cos utilisent des arguments exprimés en radians. Une calculatrice réglée en degrés peut donc fournir des valeurs incohérentes avec une formule si cette convention est oubliée.

Sur le cercle unité, un point associé à un angle x a pour coordonnées (cos x ; sin x). L'identité $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ vient de son appartenance au cercle. Le cosinus est pair, le sinus impair, et les deux sont périodiques de période 2π. Une valeur trigonométrique ne permet pas d'identifier un angle unique sans intervalle ou autre information.

Les formules d'addition relient des angles : cos(a + b) = cos a cos b − sin a sin b et sin(a + b) = sin a cos b + cos a sin b. Pour a = b = x, on retrouve sin(2x) = 2sin x cos x et $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Ces identités peuvent transformer une expression ; elles ne doivent pas être confondues avec cos(a + b) = cos a + cos b, qui est fausse.

9. Résoudre une équation trigonométrique

L'équation cos x = 1/2 a pour solutions x = π/3 + 2kπ ou x = −π/3 + 2kπ, avec k entier. Sur [0 ; 2π], cela donne π/3 et 5π/3. Le cercle explique les deux familles par symétrie. Écrire seulement π/3 oublierait une partie des solutions ; écrire une famille infinie sans filtrer l'intervalle oublierait la question posée.

Pour sin x = −sqrt(2)/2 sur [0 ; 2π], les solutions sont 5π/4 et 7π/4. Le sinus correspond à l'ordonnée, donc les points sont dans la moitié inférieure du cercle. La connaissance des angles de

référence et des signes par quadrant permet de reconstruire les valeurs, plutôt que de mémoriser une liste sans structure.

La périodicité exige un soin aux bornes. Si l'équation admet x = 0 et si le domaine est [0 ; 2π], la valeur 2π peut aussi être une solution distincte comme nombre, même si elle représente le même point du cercle. Sur [0 ; 2π[, elle est exclue. La notation de l'intervalle doit donc être conservée jusqu'à la réponse finale.

10. Dérivées et périodicité d'une composée

Les dérivées usuelles sont (sin x)' = cos x et (cos x)' = −sin x. Pour f(x) = cos(3x), f' = −3sin(3x). Sa période est 2π/3, car augmenter x de cette quantité augmente l'argument de 2π. La fréquence d'une fonction cos(ωt) correspond à |ω|/(2π) lorsque t est une durée et ω une pulsation en radians par unité de temps.

La fonction $\sin^2 x$ a une période π, même si sin x a une période 2π : changer le signe du sinus ne change pas son carré. Une transformation peut donc modifier la période minimale. Toute période d'une fonction n'est pas nécessairement sa plus petite période positive. Il faut distinguer une valeur qui fonctionne et la caractéristique fondamentale recherchée.

Pour sin x + cos x, une identité donne sqrt(2)sin(x + π/4). Cette écriture révèle une amplitude sqrt(2), une période 2π et un décalage de phase. La somme de deux sinusoïdes de même fréquence peut ainsi rester une sinusoïde avec une autre amplitude et phase. Avec des fréquences différentes, une telle réduction simple n'est pas générale.

11. Approximations locales et contrôles

Près de zéro, la dérivabilité donne e^h ≈ 1 + h, ln(1 + h) ≈ h et sin h ≈ h, pour les domaines et conventions adaptés. Ces approximations sont locales. Pour sin h, h doit être en radians. Elles ne deviennent pas des égalités parce qu'un exercice annonce « petit » ; la précision requise doit être discutée si l'on utilise une valeur numérique.

La convexité fournit une information de signe sur certains écarts. On sait e^h ≥ 1 + h, et la concavité du logarithme donne ln(1 + h) ≤ h pour h > −1. Ainsi les approximations sont respectivement une minoration et une majoration dans ces domaines. Cela ne suffit pas à connaître la taille de l'erreur ; un encadrement plus serré ou une étude du reste peut être nécessaire.

Pour contrôler un calcul, examinez des valeurs de référence : e^0 = 1, ln 1 = 0, sin 0 = 0, cos 0 = 1. Vérifiez les signes, le domaine et la périodicité. Une transformation qui modifie une de ces propriétés connues doit être réexaminée. Cette stratégie détecte des erreurs avant un calcul plus long sans prétendre remplacer une preuve.

12. Exercices corrigés et révision

A - Exponentielle. Résolvez e^(2x) = 7. **Correction :** 2x = ln 7, donc x = (ln 7)/2. Résoudre e^x = 7 puis oublier le facteur 2 donnerait une autre valeur. La positivité de 7 rend la transformation possible.

B - Domaine logarithmique. Résolvez ln(3 − x) ≥ 0. **Correction :** le domaine est x < 3. Le logarithme est positif ou nul pour un argument au moins égal à 1, donc 3 − x ≥ 1, soit x ≤ 2. L'ensemble solution est]−∞ ; 2], déjà inclus dans le domaine.

C - Identité. Simplifiez ln(5x) − ln(x) pour x > 0. **Correction :** ln(5x/x) = ln 5. Si l'on avait un x négatif, les expressions initiales ne

seraient pas définies dans les réels. Le résultat constant n'étend pas automatiquement le domaine.

D - Trigonométrie. Résolvez sin(2x) = 0 sur [0 ; π]. **Correction :** 2x = kπ, donc x = kπ/2. Le filtrage donne 0, π/2 et π. L'intervalle de l'argument est [0 ; 2π], et les deux bornes sont incluses.

E - Dérivation. Dérivez ln(1 + e^x). **Correction :** l'argument est positif sur tous les réels et la dérivée vaut e^x/(1 + e^x). Elle est comprise entre zéro et un, ce qui fournit un contrôle de signe et de taille.

F - Période. Donnez une période fondamentale de cos(4t). **Correction :** 2π/4 = π/2. La valeur 2π est aussi une période, mais n'est pas la plus petite période positive. Ne confondez pas argument, pulsation et fréquence.

Révisez en reconstruisant les domaines, les identités et les transformations plutôt qu'en mémorisant des équations isolées. Pour chaque solution, indiquez si elle est exacte, approchée, unique ou issue d'une famille périodique. Cadre de progression : programme publié de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Rédaction et exercices originaux LFDP ; aucune prévision réelle ou reproduction de sujet tiers.

Chapitre 8 - Primitives et intégrales : mesurer une accumulation et contrôler une approximation

Repère historique - Cavalieri : penser l'aire avant le calcul intégral moderne

En 1635 paraît la Geometria de Bonaventura Cavalieri, qui expose sa méthode des indivisibles. Elle constitue un jalon historique dans l'étude des aires et des volumes. Dans notre chapitre, découper et sommer aide à comprendre l'intégrale, mais la définition et les justifications modernes ne se réduisent pas à cette méthode ancienne. Le lien pédagogique est le passage d'une figure globale à des contributions comparables, puis à un résultat contrôlé. Ce repère n'attribue pas à Cavalieri seul l'invention de l'intégration et ne confond pas intuition géométrique et preuve actuelle.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/

1. Une quantité accumulée, pas une valeur instantanée

Une puissance donne une énergie par unité de temps ; l'énergie reçue sur une durée dépend de toute l'évolution de cette puissance. Une vitesse donne un déplacement par unité de temps ; le déplacement dépend de sa variation pendant le trajet. Une intégrale permet de calculer cette accumulation. Elle ne remplace donc pas la fonction initiale par une « moyenne » sans préciser comment cette moyenne est définie.

Pour une fonction continue positive sur [a ; b], l'intégrale peut être introduite par l'aire sous sa courbe entre les deux bornes. Des rectangles de plus en plus fins approchent cette aire. Pour une fonction de signe quelconque, l'intégrale devient algébrique : les

contributions situées sous l'axe sont négatives. L'aire géométrique totale et l'intégrale peuvent alors différer.

L'unité de l'intégrale est celle de la fonction multipliée par celle de la variable. Une puissance en watts intégrée sur des secondes donne des joules ; une vitesse en m/s intégrée sur des secondes donne des mètres. Si les axes sont des nombres sans unité, on parle d'unités d'aire pour une interprétation géométrique. Ce contrôle relie le calcul à la question réellement posée.

2. Primitives : une famille de fonctions

Une primitive F de f sur un intervalle I est une fonction dérivable telle que F' = f sur I. Si F est une primitive, F + C l'est aussi pour toute constante C. Réciproquement, deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante. La mention « intervalle » compte : sur un domaine composé de morceaux séparés, les constantes peuvent être différentes sur chaque morceau.

Pour f(x) = 2x, F(x) = x² est une primitive. Pour f(x) = e^(3x), F(x) = e^(3x)/3 convient. Pour f(x) = cos(4x), F(x) = sin(4x)/4. On contrôle chaque proposition par dérivation. Le facteur intérieur doit être compensé ; écrire e^(3x) comme primitive de e^(3x) oublierait le facteur 3 de sa dérivée.

Une condition supplémentaire fixe la constante. Si F' = 2x et F(1) = 5, alors F(x) = x² + C et 1 + C = 5, donc C = 4. La condition initiale transforme une famille en une fonction déterminée. Cette idée sera réutilisée dans les équations différentielles : intégrer donne une famille, les données permettent de choisir un membre.

3. Théorème fondamental et calcul par primitive

Pour une fonction continue f sur un intervalle contenant a et b, toute primitive F permet de calculer ∫_a^b f(x) dx = F(b) − F(a). Ajouter une constante à F ne change pas cette différence. La borne inférieure est soustraite après avoir évalué la primitive ; une mauvaise parenthèse peut inverser le résultat.

La fonction G(x) = ∫_a^x f(t) dt est une primitive de f lorsque les hypothèses de continuité sont respectées. La variable t sous le signe intégral est une variable d'intégration ; x représente ici la borne variable. Cette distinction évite d'écrire une même lettre dans plusieurs rôles sans savoir ce qui varie. L'intégrale relie ainsi aire accumulée et dérivation.

Pour f(x) = 3x² − 2 sur [1 ; 2], une primitive est F(x) = x³ − 2x. L'intégrale vaut (8 − 4) − (1 − 2) = 5. La fonction est positive sur cet intervalle, ce qui rend un résultat positif cohérent. La vérification de signe est indépendante du calcul de parenthèses et peut révéler une erreur avant la réponse finale.

4. Aire algébrique et aire géométrique

Prenons f(x) = x − 1 sur [0 ; 3]. Une primitive est x²/2 − x. L'intégrale vaut 3/2. Pourtant la région entre la courbe et l'axe comporte une partie négative entre 0 et 1 et une partie positive entre 1 et 3. L'aire géométrique totale est la somme des deux aires positives : 1/2 + 2 = 5/2.

Pour calculer cette aire, on intègre |f| ou on découpe le domaine aux changements de signe. La formule ∫f donne la différence entre contributions positives et négatives. Une intégrale nulle n'impose donc pas une fonction nulle : les contributions peuvent se compenser. Par exemple, ∫_(−1)^1 x dx = 0 alors que le graphe présente deux régions non nulles.

Pour l'aire entre deux courbes f et g, on intègre |f − g|. Si l'on sait f ≥ g sur l'intervalle, l'aire est ∫(f − g). Les intersections peuvent imposer plusieurs morceaux. Choisir la courbe « du haut » à partir d'un seul point sans étudier le signe peut produire une aire négative ou une compensation involontaire.

5. Propriétés de l'intégrale

La linéarité donne ∫(αf + βg) = α∫f + β∫g, pour les mêmes bornes et les hypothèses appropriées. La relation de Chasles permet de découper : ∫_a^b f + ∫_b^c f = ∫_a^c f. Inverser les bornes change le signe, et l'intégrale entre deux bornes égales est nulle. Ces règles organisent un calcul sans demander une nouvelle primitive à chaque morceau.

Si f ≥ 0 sur [a ; b] avec a ≤ b, son intégrale est positive ou nulle. Si f ≤ g, alors ∫f ≤ ∫g. Une inégalité point par point peut donc encadrer une accumulation. L'ordre des bornes compte : les signes sont inversés si l'on passe d'une orientation à l'autre. Les propriétés doivent être utilisées avec leurs conventions.

Si m ≤ f(x) ≤ M sur [a ; b], alors m(b − a) ≤ ∫_a^b f ≤ M(b − a). Cette borne ne fournit pas toujours une grande précision, mais elle permet un contrôle immédiat. Une valeur calculée hors de cet encadrement est incompatible avec les données ou le calcul. Pour une fonction comprise entre 2 et 5 sur un intervalle de longueur 3, l'intégrale doit être comprise entre 6 et 15.

6. Reconnaître une dérivée composée à l'envers

Le calcul de primitives gagne à repérer une structure. Si u est dérivable, une primitive de u'e^u est e^u. Pour u > 0, une primitive de u'/u est ln(u). Une primitive de u'cos(u) est sin(u). Le facteur u' est déterminant ; la seule présence d'une exponentielle, d'un quotient ou d'un cosinus ne suffit pas.

Pour f(x) = 2x/(x² + 1), on reconnaît u = x² + 1, toujours positive, et u' = 2x. Une primitive est ln(x² + 1). Pour g(x) = 6x e^(3x²), une primitive est e^(3x²). Si le numérateur du premier exemple était x, il faudrait ajouter un facteur 1/2. Un contrôle par dérivation permet de retrouver le coefficient exact.

On ne doit pas inventer une primitive en « intégrant séparément » le numérateur et le dénominateur d'un quotient. De même, une primitive d'un produit n'est pas le produit de deux primitives. Les règles de dérivation expliquent pourquoi ces raccourcis seraient faux. Quand aucune structure immédiate ne convient, une autre méthode ou une approximation peut être nécessaire.

7. Intégration par parties : utiliser la dérivée d'un produit

La formule (uv)' = u'v + uv' donne, après intégration, ∫_a^b u'v = [uv]_a^b − ∫_a^b uv'. Cette relation d'intégration par parties transforme une intégrale en une autre. Son intérêt dépend du choix : on cherche une dérivée qui simplifie un facteur et une primitive accessible pour l'autre. Il n'existe pas de choix automatiquement efficace pour tout produit.

Pour ∫_0^1 xe^x dx, prenons v = x et u' = e^x, donc u = e^x et v' = 1. L'intégrale vaut [xe^x]_0^1 − ∫_0^1 e^x dx = e − (e − 1) = 1. Une primitive équivalente est (x − 1)e^x, vérifiable par dérivation. Le résultat positif est cohérent avec l'intégrande positive sur l'intervalle.

Pour ∫_1^e ln(x) dx, on peut prendre v = ln(x) et u' = 1, donc u = x et v' = 1/x. On obtient [xln(x)]_1^e − ∫_1^e 1 dx = e − (e − 1) = 1. Écrire une primitive xln(x) sans le terme −x aurait oublié une partie de sa dérivée. La méthode est comprise grâce au produit, pas à une recette de sélection mémorisée sans justification.

8. Valeur moyenne d'une fonction

La valeur moyenne de f sur [a ; b], avec a < b, est μ = [1/(b − a)]∫_a^b f(x) dx. Elle a la même unité que f. Elle correspond à la hauteur d'un rectangle de même largeur et de même aire algébrique que l'intégrale. La moyenne de quelques valeurs échantillonnées n'est pas automatiquement cette valeur ; elle dépend de l'échantillonnage et de l'approximation utilisée.

Pour f(x) = x² sur [0 ; 2], l'intégrale vaut 8/3 et la moyenne 4/3. La moyenne des seules valeurs aux extrémités, (0 + 4)/2 = 2, est différente. Si f est continue, sa valeur moyenne est atteinte en au moins un point de l'intervalle ; ici x = 2/sqrt(3) convient. Cette propriété ne donne pas toujours un point unique.

Dans un modèle de puissance P(t) = 3t + 2 sur [0 ; 4] secondes, avec les unités de coefficients adaptées, l'énergie vaut ∫P dt = 32 J et la puissance moyenne 8 W. Pour cette fonction affine, la moyenne des valeurs initiale et finale donne aussi 8 W. L'égalité résulte de la structure affine ; elle ne doit pas être généralisée à toute courbe.

9. Rectangles et encadrement numérique

Divisons [0 ; 1] en quatre intervalles de largeur 1/4 pour f(x) = x², croissante. Les rectangles utilisant les valeurs gauches minorent l'aire ; ceux utilisant les valeurs droites la majorent. La somme gauche est (1/4)[0² + (1/4)² + (1/2)² + (3/4)²] = 0,21875. La somme droite vaut 0,46875. L'intégrale exacte 1/3 se trouve entre les deux.

En augmentant le nombre de subdivisions, ces encadrements se resserrent pour une fonction continue dans ce cadre. Une méthode numérique doit annoncer le nombre et la largeur des intervalles ainsi que le choix des points. Une liste de résultats sans méthode ne permet pas de juger la précision. Si la fonction n'est pas

monotone, le choix gauche ou droit ne garantit pas à lui seul une borne ; il faut étudier les extrema sur chaque morceau ou employer d'autres arguments.

La méthode des trapèzes utilise les segments reliant les valeurs aux bornes. Pour cet exemple convexe, elle surestime l'aire et donne 0,34375 avec quatre morceaux. La méthode des milieux donne 0,328125, une sous-estimation dans ce cas. La position des cordes et la convexité expliquent le sens de ces écarts. Sans cette information, ces méthodes fournissent des approximations mais pas nécessairement des bornes certifiées.

10. Une suite d'intégrales et une relation de récurrence

Définissons I_n = ∫_0^1 x^n e^x dx pour n ≥ 0. Les intégrandes sont positives, donc I_n > 0. Comme 0 ≤ x ≤ 1, x^(n+1) ≤ x^n, donc I_(n+1) ≤ I_n. La suite est décroissante et minorée par zéro ; elle converge. Pour identifier sa limite, on peut utiliser e^x ≤ e : I_n ≤ e∫_0^1 x^n dx = e/(n + 1), qui tend vers zéro. L'encadrement donne donc I_n → 0.

Une intégration par parties pour n ≥ 1 donne I_n = [x^n e^x]_0^1 − n∫_0^1 x^(n−1)e^x dx = e − nI_(n−1). Le premier terme est I_0 = e − 1 ; on retrouve I_1 = 1. Le cas n = 0 doit être traité séparément, car l'écriture du terme de bord à zéro et la puissance n − 1 changent de statut.

Cette relation est exacte mais peut être numériquement délicate pour de grands n, car elle soustrait des quantités proches et amplifie certaines erreurs d'arrondi. Une formule de récurrence correcte n'est pas automatiquement le meilleur algorithme flottant. Les bornes théoriques constituent ici un contrôle précieux : un résultat négatif serait impossible pour ces intégrales positives.

11. Exercices corrigés

A - Primitive et borne. Calculez $\int_0^2 (4x + 1)\,dx$. **Correction :** une primitive est $2x^2 + x$, donc l'intégrale vaut 10. La fonction est positive sur cet intervalle ; un résultat négatif signalerait une erreur de signe ou de bornes.

B - Aire entre courbes. Comparez x et x^2 sur $[0 ; 1]$, puis calculez l'aire entre leurs graphes. **Correction :** $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$. L'aire vaut $\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$. L'ordre des deux fonctions est établi avant l'intégration.

C - Produit. Calculez $\int_0^1 xe^{(2x)}\,dx$. **Correction :** une intégration par parties donne $[xe^{(2x)}/2]_0^1 - (1/2)\int_0^1 e^{(2x)}\,dx = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (e^2 + 1)/4$. Le facteur 1/2 intervient deux fois et doit être conservé.

D - Déplacement. Une vitesse est $v(t) = 2 - t$ sur $[0 ; 4]$. **Correction :** son intégrale vaut $[2t - t^2/2]_0^4 = 0$. La distance n'est pas nulle : elle vaut $2 + 2 = 4$ dans l'unité de longueur, en séparant les phases avant et après $t = 2$. L'intégrale de la vitesse algébrique donne un déplacement.

E - Encadrement. Une fonction vérifie $1 \leq f \leq 3$ sur $[2 ; 5]$. **Correction :** $3 \leq \int_2^5 f \leq 9$ et sa valeur moyenne est comprise entre 1 et 3. Cet encadrement ne détermine pas une valeur unique ; il fixe ce qui est compatible avec les seules bornes données.

12. Révision et références

Révisez une intégrale par son sens, ses unités, son signe et sa méthode de calcul. Vérifiez une primitive par dérivation. Pour une aire géométrique, examinez les changements de signe ; pour une approximation, annoncez les hypothèses qui en font une borne ou seulement une estimation. Conservez les constantes et les facteurs de composée jusqu'au contrôle final.

Le cadre officiel publié de Terminale inclut primitives, intégrales, valeur moyenne et intégration par parties : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Les preuves, situations et exercices de ce chapitre sont originaux LFDP. Aucun texte de programme ou manuel, ni sujet d'examen tiers, n'est reproduit.

Chapitre 9 - Équations différentielles : relier une évolution à sa vitesse de changement

Repère historique - Euler : chercher des fonctions à partir de relations

Euler publie son traité de calcul intégral en trois volumes entre 1768 et 1770 ; il y étudie aussi des équations différentielles. Ce jalon rappelle que l'inconnue peut être une fonction entière, et non un nombre isolé. Dans ce chapitre, une relation entre une fonction et sa dérivée est accompagnée d'une condition initiale, puis confrontée à une interprétation et à une approximation numérique. L'archive institutionnelle date le premier volume de 1768 ; le fichier qu'elle propose est une troisième édition de 1824, distinction à conserver lorsqu'on consulte le document historique.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/ ; University of the Pacific - Euler Archive : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/342/

1. Une équation dont l'inconnue est une fonction

Une équation différentielle relie une fonction inconnue à une ou plusieurs de ses dérivées. Résoudre $y' = 2y$ ne consiste pas à trouver un seul nombre y : on cherche toutes les fonctions dérivables satisfaisant cette relation sur un intervalle. Une condition initiale, comme $y(0) = 3$, sélectionne ensuite une solution dans une famille. La distinction entre relation d'évolution et état initial est aussi importante que pour les suites.

Les variables doivent être nommées. Si t représente un temps, $y(t)$ peut représenter une température, une concentration fictive ou une grandeur abstraite. Le coefficient qui multiplie y dans $y' = ay$

possède une unité inverse du temps si y garde la même unité. Un second membre b dans y' = ay + b a l'unité de y par unité de temps. Une équation peut être algébriquement correcte et physiquement incohérente si les unités ne correspondent pas.

Le chapitre traite surtout les équations linéaires du premier ordre à coefficients constants. Des compléments montrent pourquoi ce modèle ne couvre pas toutes les évolutions. Les situations sont construites pour apprendre ; elles ne prédisent aucun rendement, évolution de santé ou phénomène réel sans validation des hypothèses et paramètres.

2. Résoudre y' = ay et justifier toute la famille

La fonction y(t) = Ce^(at) vérifie y' = aCe^(at) = ay pour toute constante C. Pour montrer que toutes les solutions ont cette forme, prenons une solution y et définissons z(t) = y(t)e^(−at). Par la règle du produit, z' = y'e^(−at) − aye^(−at) = 0. Sur un intervalle, z est donc constante et y = Ce^(at). Cette preuve établit la famille entière, pas seulement quelques exemples de solutions.

Si y(t_0) = y_0, alors C = y_0e^(−at_0), d'où y(t) = y_0e^[a(t − t_0)]. La forme avec t − t_0 conserve clairement l'origine de la condition initiale. Pour a = 0, on retrouve les solutions constantes. Pour y_0 = 0, la solution est identiquement nulle quel que soit a. Le signe de y_0 est conservé puisque l'exponentielle est positive.

Si a > 0 et y_0 > 0, la fonction augmente et diverge à long terme dans le modèle. Si a < 0 et y_0 > 0, elle décroît vers zéro. Une valeur négative de a signifie une décroissance relative proportionnelle à la valeur présente, pas une diminution fixe à chaque unité de temps. Cette dernière serait décrite par y' = b avec b constant.

3. Un terme constant et une valeur d'équilibre

Pour y' = ay + b avec a ≠ 0, cherchons une solution constante L. Elle doit vérifier 0 = aL + b, donc L = −b/a. En posant z = y − L, on obtient z' = az. Ainsi les solutions sont y(t) = L + Ce^(at). Le changement de variable mesure l'écart à l'équilibre et transforme l'équation en un cas déjà résolu.

Avec y(t_0) = y_0, la solution devient y(t) = L + (y_0 − L)e^[a(t − t_0)]. On vérifie la condition initiale, puis l'équation par dérivation. Si a < 0, l'écart à L tend vers zéro. Une solution peut monter vers L ou descendre vers L selon le signe de y_0 − L. Le même modèle ne fixe pas une direction de variation indépendamment de l'état initial.

Si a > 0, un écart initial non nul grandit en valeur absolue ; la solution constante y = L existe pourtant encore. Il serait donc faux d'affirmer que toutes les solutions divergent pour a > 0. Pour a = 0, la transformation précédente n'est pas autorisée ; l'équation est y' = b et ses solutions sont y(t) = bt + C. Séparer ce cas évite une division par zéro.

4. Une équation avec une condition à une autre date

Résolvons y' + 3y = 9 avec y(1) = 4. L'équation équivaut à y' = −3y + 9, donc L = 3 et y(t) = 3 + Ce^(−3t). La condition donne 4 = 3 + Ce^−3, soit C = e³. On peut écrire plus lisiblement y(t) = 3 + e^[−3(t − 1)]. À t = 1, le facteur exponentiel vaut un et la valeur vaut bien quatre.

L'équation et la condition ne demandent pas nécessairement une origine à t = 0. Une erreur classique consiste à prendre C = 4 parce qu'on a mémorisé le cas y(0) = y_0 pour y' = ay. Ici le terme d'équilibre et la date initiale modifient la constante. La vérification au point donné est courte et détecte immédiatement cette erreur.

La solution reste supérieure à 3 et décroît pour $t \geq 1$. Sa limite vaut 3. La limite découle du signe du coefficient exponentiel, pas du simple fait que l'équation possède une solution constante. Pour une équation avec $a > 0$, la valeur constante serait généralement instable face à un écart initial. Existence d'équilibre et attraction vers l'équilibre sont deux propriétés différentes.

5. Refroidissement : construire le modèle depuis un bilan

Un objet fictif de capacité thermique C échange avec un milieu maintenu à T_ext. Une loi de puissance reçue $-H(T - T_{ext})$, avec $H > 0$ constant, conduit à $C\,T' = -H(T - T_{ext})$. L'équation s'écrit $T' = -(1/\tau)(T - T_{ext})$, où $\tau = C/H$ est un temps caractéristique. La solution est $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{(-t/\tau)}$ si l'état initial est donné à zéro.

Pour $T_0 = 70$ °C, $T_{ext} = 10$ °C et $\tau = 4$ min, on obtient $T(t) = 10 + 60e^{(-t/4)}$, avec t en minutes. Le modèle approche 10 °C, pas zéro. Pour atteindre au plus 25 °C, l'écart doit devenir au plus 15 : $e^{(-t/4)} \leq 1/4$, donc $t \geq 4\ln(4) \approx 5{,}55$ min. Le logarithme porte sur un rapport sans dimension.

Ce calcul ne fournit pas un protocole de contact avec un objet chaud. L'environnement réel peut varier, l'objet peut ne pas avoir une température uniforme et le coefficient H peut dépendre des conditions. Le modèle est utile lorsque ces approximations sont acceptables pour la question. L'équation ne devient pas une validation physique parce que sa solution est exacte mathématiquement.

6. Entrée, sortie et conservation dans un réservoir fictif

Un réservoir idéal de volume constant V reçoit et évacue le même débit volumique Q. On suppose un mélange instantanément homogène et une concentration entrante c_in constante. Si M = Vc est la quantité de substance présente, le bilan est M' = Qc_in − Qc. Avec V constant, cela donne c' = (Q/V)(c_in − c). La relation résulte des deux flux, pas d'une préférence pour une exponentielle.

La concentration d'équilibre est c_in et le temps caractéristique V/Q. Pour V = 100 litres et Q = 5 litres par minute, ce temps vaut 20 min. Si la concentration initiale est 3 g/L et celle d'entrée 1 g/L, la solution est c(t) = 1 + 2e^(−t/20). Après 20 min, elle vaut environ 1,736 g/L. Le volume total reste constant dans ce modèle, mais la quantité de substance varie.

Si l'entrée ne contient pas cette substance, c_in = 0 et c décroît exponentiellement. Pour c_0 = 5 g/L, la quantité initiale dans 100 litres vaut 500 g ; après une constante de temps, elle vaut environ 184 g. Ce sont des valeurs d'exercice, non des dosages, traitements ou recommandations d'utilisation d'un fluide. Un mélange non homogène ou un volume variable exigerait une autre équation.

7. Modèles linéaire, exponentiel et saturant

Une croissance constante y' = b donne une évolution affine. Une croissance proportionnelle y' = ry donne une exponentielle. Les deux peuvent être proches sur une courte plage et très différentes à long terme. Choisir entre elles demande des hypothèses et des observations. Ajuster deux points ne permet pas toujours de décider quelle règle restera pertinente après ces points.

En complément, une équation non linéaire y' = ry(1 − y/K), avec r > 0 et K > 0, modélise une croissance réduite à l'approche d'une capacité K. Pour 0 < y_0 < K, une solution est y(t) = K/[1 + A

e^(−rt)], avec A = K/y_0 − 1. Sa vérification par dérivation est possible. Les solutions constantes zéro et K doivent être examinées séparément ; la formule de A n'est pas définie pour y_0 = 0.

Ce complément n'est pas un modèle universel de population. Le paramètre K peut être artificiel ou variable dans une situation réelle, et d'autres effets peuvent dominer. Il sert à montrer qu'une exponentielle sans limite n'est pas la seule structure mathématique possible. Une concurrence entre modèles se juge par leurs hypothèses et prédictions, pas par l'allure plus rassurante d'une courbe.

8. Méthode d'Euler : une approximation discrète

Pour y' = f(t,y), la méthode d'Euler explicite utilise y_(n+1) = y_n + h f(t_n,y_n), avec t_(n+1) = t_n + h. Elle remplace une évolution sur un petit intervalle par la variation locale donnée au départ. Le pas h doit avoir l'unité du temps. Les valeurs calculées approchent la solution ; elles ne sont pas, en général, les valeurs exactes aux mêmes dates.

Pour y' = −ky avec k > 0, Euler donne y_(n+1) = (1 − kh)y_n. La solution exacte sur un pas multiplie y par e^(−kh), toujours positif. Si 0 < kh ≤ 1, le facteur d'Euler reste positif ou nul et produit une décroissance pour un état initial positif. Si 1 < kh < 2, les valeurs alternent de signe tout en diminuant en valeur absolue. Si kh > 2, elles peuvent croître en valeur absolue alors que la solution continue décroît.

Avec k = 1 et h = 3 dans des unités compatibles, le facteur numérique vaut −2 : la méthode diverge pour y_0 ≠ 0. Cet échec ne réfute pas la solution exacte e^−t ; il montre un pas inadéquat et une limite de l'algorithme. Diminuer le pas peut améliorer une approximation, mais il faut encore examiner régularité, durée et

erreurs accumulées. Un programme exécuté sans erreur informatique n'est pas forcément une simulation mathématiquement fiable.

9. Identifier un paramètre et vérifier indépendamment

Si l'on connaît l'équilibre L et si les observations sont supposées suivre y(t) = L + Ce^(at), deux valeurs dont les écarts à L sont non nuls et de même signe permettent d'estimer a par ln[(y(t_2) − L)/(y(t_1) − L)]/(t_2 − t_1). Un rapport positif et deux dates distinctes sont nécessaires. Le coefficient estimé dépend du modèle annoncé.

Pour des données fictives L = 2, y(0) = 10 et y(4) = 6, le rapport des écarts vaut 4/8 = 1/2, donc a = −ln(2)/4. Le modèle prédit ensuite y(8) = 4. Une mesure indépendante à cette date pourrait tester la prédiction. Retrouver les deux valeurs utilisées pour ajuster le modèle n'est pas un test indépendant : c'est une vérification de la construction.

Si L est aussi inconnu, deux observations ne déterminent pas forcément les trois paramètres L, C et a. Les incertitudes et la plage d'observation peuvent aussi rendre une estimation fragile. La solution d'une équation différentielle, l'ajustement de ses paramètres et la validation du modèle sont trois étapes distinctes. Une belle courbe calculée ne remplace aucune de ces étapes.

10. Un aperçu du second ordre

Une équation y'' + ω²y = 0, avec ω > 0, intervient dans un oscillateur idéal. Les fonctions A cos(ωt) + B sin(ωt) la vérifient par deux dérivations. Avec y(0) = y_0 et y'(0) = v_0, on obtient A = y_0 et B = v_0/ω. Deux conditions sont nécessaires pour déterminer ces deux constantes. Ce complément éclaire le lien entre trigonométrie et évolution dynamique.

La période vaut 2π/ω. Le modèle ne comporte ni dissipation ni force entretenue ; une oscillation réelle peut donc demander d'autres termes. Il ne faut pas résoudre cette équation comme y' = ay : l'ordre et le type de relation sont différents. Identifier l'équation précède le choix de la méthode.

Le chapitre principal reste centré sur le premier ordre linéaire à coefficients constants. L'oscillateur et la croissance saturante sont des ouvertures explicitement distinguées, utiles pour comprendre les limites d'une famille de modèles. Ils ne sont pas présentés comme une annonce de sujet ou d'exigence d'une session d'examen.

11. Exercices corrigés

A - Famille complète. Résolvez y' = −2y et imposez y(0) = 5. **Correction :** les solutions sont Ce^(−2t) ; la condition donne C = 5. La solution est positive et décroît vers zéro. Vérifier la dérivée et la valeur initiale suffit à contrôler la fonction obtenue, tandis que la preuve de famille garantit qu'aucune autre solution n'a été oubliée dans ce cadre.

B - Équilibre. y' = 2y − 6, y(0) = 4. **Correction :** L = 3 et y(t) = 3 + e^(2t). L'équilibre existe mais cette solution s'en éloigne. Avec y(0) = 3, elle serait constante ; avec y(0) = 2, elle serait 3 − e^(2t), pouvant devenir négative. Si y devait représenter une quantité non négative, cette dernière phase signalerait une limite du modèle physique.

C - Terme constant. y' = −4 et y(0) = 7. **Correction :** y(t) = 7 − 4t. Ce n'est pas une exponentielle. La valeur devient zéro à t = 7/4. Un domaine physique imposant y ≥ 0 devrait être arrêté ou modifié au-delà de ce seuil.

D - Solution proposée. La fonction y = e^(2t) satisfait-elle y' = 2y + 1 ? **Correction :** sa dérivée vaut 2e^(2t), tandis que le second

membre vaut 2e^(2t) + 1. La différence constante montre que la proposition ne convient pas, indépendamment de la condition initiale.

E - Pas numérique. Pour y' = −y, y_0 = 1 et h = 0,5, calculez le premier pas d'Euler et comparez-le à la valeur exacte. **Correction :** Euler donne 0,5 ; la solution exacte donne e^−0,5 ≈ 0,6065. L'écart est environ 0,1065. Le pas numérique décrit une approximation, pas une autre solution exacte de la même équation.

12. Révision et références

Pour réviser, établissez la famille, utilisez la condition initiale puis vérifiez par dérivation. Étudiez l'équilibre, le signe et la limite sans les déduire mécaniquement du seul nom de l'équation. Pour un modèle, annoncez les échanges et les unités. Pour une simulation, distinguez solution exacte et approximation, et vérifiez un invariant ou une borne indépendante.

Cadre officiel publié de Terminale : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm et annexe https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultés le 11 octobre 2026. Développements, exemples et exercices originaux LFDP. Les modèles de refroidissement et de réservoir sont pédagogiques et ne valent aucun protocole de manipulation, diagnostic, dosage ou prédiction d'une situation réelle.

Chapitre 10 - Dénombrement, probabilités et loi binomiale

Repère historique - Pascal : une disposition révèle une structure

La BnF recense une publication de 1665 du Traité du triangle arithmétique de Blaise Pascal, après sa mort. Ce repère accompagne la lecture des coefficients binomiaux : une disposition de nombres peut aider à reconnaître une relation, puis une démonstration explique pourquoi celle-ci tient. Nous séparons dans ce chapitre la construction du triangle, le dénombrement et les applications probabilistes. L'association du triangle au nom de Pascal n'affirme pas qu'il fut le premier à connaître cette disposition ; elle situe un ouvrage historique précis plutôt qu'une origine unique de toutes les idées du chapitre.

Source historique : Bibliothèque nationale de France - Catalogue collectif de France : https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/ark:/16871/00114268519

1. Un modèle probabiliste doit commencer par ses issues

Un calcul de probabilité décrit un modèle d'expérience, pas l'incertitude en général. On définit l'univers des issues possibles, les événements et une règle attribuant des probabilités. Dans un univers fini, les probabilités élémentaires sont positives ou nulles et leur somme vaut un. Un événement est un ensemble d'issues ; sa probabilité est la somme des probabilités qui leur sont attribuées.

Le mot « hasard » ne garantit pas l'équiprobabilité. Une pièce peut être déséquilibrée ; un tirage dépend du dispositif ; un échantillon peut être sélectionné avec un biais. La formule « cas favorables divisés par cas possibles » est justifiée lorsque les issues comptées

sont équiprobables. Elle devient trompeuse si l'on compte des catégories qui regroupent des nombres d'issues différents.

Pour deux lancers d'un dé équilibré, les trente-six couples ordonnés sont équiprobables. Les sommes possibles vont de deux à douze, mais ces onze valeurs ne sont pas équiprobables : une seule paire donne deux, tandis que six donnent sept. Changer la représentation d'une expérience ne conserve donc pas automatiquement une loi uniforme sur les nouvelles catégories.

Il faut distinguer la probabilité théorique et la fréquence observée. Une fréquence est le quotient d'un nombre d'occurrences par un nombre d'essais réalisés. Elle constitue une donnée, susceptible de varier d'une série à l'autre. Une probabilité est un paramètre du modèle. Leur rapprochement sera justifié sous des hypothèses de répétition, et non par une identification immédiate.

2. Compter sans répétition et sans double comptage

Si une première décision offre a possibilités et une seconde b possibilités pour chacune, le nombre de couples de choix est a b. Ce principe suppose que le nombre de possibilités de la seconde étape soit bien b pour chaque première décision. Lorsque ce nombre varie, il faut additionner les contributions correspondantes. Un arbre permet de voir cette distinction plutôt que d'appliquer mécaniquement un produit.

Pour former un code de quatre caractères avec dix choix possibles à chaque position et répétition autorisée, on obtient 10^4 codes. Si les caractères doivent être distincts, les choix successifs sont dix, neuf, huit puis sept : on obtient 5 040 codes. Le changement de condition transforme le dénombrement, même si la longueur du code reste identique.

L'ordre compte dans un code ou dans un podium. Choisir trois personnes parmi cinq pour occuper successivement trois places

donne 5 × 4 × 3 = 60 possibilités. Choisir un groupe de trois personnes parmi les mêmes cinq, sans rôles distincts, ne donne que dix groupes. Chaque groupe a été compté 3! = 6 fois parmi les listes ordonnées, d'où 60/6 = 10.

Pour n objets distincts, le nombre de permutations est n!. On pose 0! = 1, convention cohérente avec plusieurs identités. Le nombre de sous-ensembles de k éléments parmi n est le coefficient binomial :

C(n,k) = n! / [k! (n − k)!], pour 0 ≤ k ≤ n.

La formule exprime précisément la suppression de l'ordre. On peut également lire C(n,k) = C(n,n − k) : choisir les éléments retenus revient à choisir leur complément. Cette symétrie sert de contrôle et facilite certains calculs.

Pour n ≥ 2 et 1 ≤ k ≤ n − 1, la relation de Pascal, C(n,k) = C(n − 1,k − 1) + C(n − 1,k), se démontre en séparant les groupes qui contiennent un objet fixé et ceux qui ne le contiennent pas. Cette démonstration donne du sens aux deux termes ; elle est plus utile qu'une identité factorielle apprise sans interprétation.

3. Réunion, intersection et complément

L'événement contraire de A, noté non A ou A^c, contient toutes les issues qui n'appartiennent pas à A. Sa probabilité vaut 1 − P(A). Cette relation est particulièrement efficace pour traiter « au moins un » en calculant d'abord « aucun », lorsque ce dernier événement se décrit plus simplement.

L'intersection A ∩ B signifie que les deux événements se réalisent. La réunion A ∪ B signifie qu'au moins l'un se réalise, éventuellement les deux. La formule générale est P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B). La soustraction enlève le double comptage de

l'intersection. Si les événements sont incompatibles, leur intersection est vide et cette contribution est nulle.

L'incompatibilité et l'indépendance sont deux notions différentes. Deux événements incompatibles de probabilités strictement positives ne sont pas indépendants : la réalisation de l'un exclut l'autre. À l'inverse, des événements indépendants peuvent se réaliser ensemble. Un lancer pair et un lancer donnant au moins quatre peuvent partager des issues sans être automatiquement indépendants ; leur relation se calcule dans le modèle.

Un dessin de deux ensembles peut aider à comprendre les opérations, mais il ne fournit pas une mesure fiable de leurs probabilités si les surfaces n'ont pas été construites à cette fin. Les diagrammes organisent le raisonnement ; les données et la loi assurent le calcul.

4. Probabilité conditionnelle : changer l'univers de référence

Lorsque P(A) est strictement positive, la probabilité de B sachant A est définie par P(B|A) = P(A ∩ B)/P(A). Le dénominateur correspond à l'événement qui devient la référence. On peut réécrire P(A ∩ B) = P(A) P(B|A). Cette relation permet de calculer une branche d'arbre sans supposer l'indépendance.

Dans une population fictive de lots, 40 % proviennent de l'atelier A et 60 % de l'atelier B. La probabilité qu'un lot respecte un critère annoncé est de 90 % dans A et 60 % dans B. L'événement R désigne le respect du critère. Les probabilités conjointes sont P(A ∩ R) = 0,40 × 0,90 = 0,36 et P(B ∩ R) = 0,60 × 0,60 = 0,36.

Comme les deux ateliers forment une partition de la population, P(R) = 0,72. Parmi les lots qui respectent le critère, la probabilité de provenance A vaut 0,36/0,72 = 0,50. Elle ne vaut ni 0,40, ni 0,90. Le calcul a changé la population de référence : on ne

considère plus tous les lots, mais seulement ceux qui satisfont le critère.

Cet exemple montre pourquoi P(R|A) et P(A|R) ne sont pas interchangeables. La première décrit les résultats à l'intérieur de l'atelier ; la seconde décrit l'origine parmi les résultats retenus. Les mêmes événements apparaissent dans les deux écritures, mais leurs dénominateurs diffèrent.

Un tableau à double entrée constitue une autre représentation. Sur mille lots fictifs conformes aux proportions du modèle, 400 viennent de A et 600 de B ; 360 dans chaque groupe respectent le critère. Parmi les 720 lots retenus, la moitié viennent de A. Ce tableau peut rendre la condition plus tangible que des symboles, sans remplacer la définition.

5. Probabilités totales et effet des taux de base

Une partition est une famille d'événements incompatibles qui couvre l'univers. Pour une partition A₁, …, A_m dont les probabilités sont positives, P(B) est la somme des P(A_i) P(B|A_i). On additionne des contributions appartenant à des groupes distincts. Cette formule ne demande pas que B soit indépendant des groupes.

Un dispositif fictif de contrôle signale 95 % des pièces défectueuses et signale aussi 5 % des pièces non défectueuses. Le modèle suppose que 1 % des pièces sont défectueuses. Sur dix mille pièces théoriques, on compte cent défectueuses, dont quatre-vingt-quinze signalées, et neuf mille neuf cents non défectueuses, dont quatre cent quatre-vingt-quinze signalées. Le nombre total signalé est donc cinq cent quatre-vingt-dix.

La probabilité qu'une pièce signalée soit effectivement défectueuse est 95/590, environ 16,1 %. Une forte proportion de défectueuses détectées ne signifie donc pas que tous les signalements sont fiables. Le taux de base des défauts et les faux

signalements contribuent au résultat. L'exemple ne concerne pas une décision médicale : il illustre uniquement un raisonnement conditionnel dans une fabrication imaginaire.

Le même dispositif appliqué à une population où les défauts sont beaucoup plus fréquents produirait une autre probabilité conditionnelle après signalement. Il serait donc erroné de présenter le résultat comme une propriété isolée du dispositif. Cette vigilance devient essentielle lorsqu'un pourcentage est communiqué sans décrire la population de départ.

6. Indépendance : une hypothèse qui permet un produit

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Si $P(A)$ est positive, cette condition équivaut à $P(B|A) = P(B)$. Apprendre que A s'est réalisé ne modifie alors pas la probabilité de B dans le modèle. L'indépendance exprime une structure probabiliste, pas l'absence de proximité spatiale ni une absence générale de cause commune.

Deux lancers successifs d'une pièce sont souvent modélisés comme indépendants avec une probabilité de succès constante. Des tirages avec remise peuvent l'être aussi si le mélange et le mécanisme sont adaptés. Des tirages sans remise dans une petite urne ne le sont généralement pas : la composition restante change après le premier tirage.

Une urne contient trois boules rouges et deux bleues. Sans remise, P(rouge au premier tirage) = 3/5, et la probabilité de rouge au second sachant rouge au premier vaut 2/4. La probabilité de deux rouges est donc 3/10. Avec remise et mélange conforme au modèle, elle vaudrait $(3/5)^2 = 9/25$. Les deux expériences ne sont pas deux calculs alternatifs pour le même protocole.

Pour plusieurs épreuves, on utilise une indépendance conjointe adaptée à la succession considérée. La vérification de relations

deux à deux ne suffit pas, en général, à établir toute la structure d'indépendance d'une famille. Dans les exercices de schéma de Bernoulli, l'indépendance de l'ensemble des épreuves est une hypothèse annoncée du modèle ; il faut la mentionner avant le produit.

7. La variable aléatoire compte ce que l'on étudie

Une variable aléatoire associe un nombre à chaque issue. Deux issues différentes peuvent donner la même valeur. Sa loi indique les valeurs possibles et leurs probabilités. Son espérance est la moyenne pondérée de ces valeurs par leurs probabilités, pas une valeur que l'expérience doit obligatoirement produire.

Une variable de Bernoulli vaut un en cas de succès et zéro sinon, avec probabilité de succès p. Son espérance vaut p. Comme son carré est égal à elle-même, sa variance vaut $p - p^2 = p(1 - p)$. Le mot succès est une convention de comptage : il peut désigner un défaut, une panne ou un événement indésirable, sans jugement de valeur.

Pour une variable X, la variance s'écrit $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$. Elle mesure une dispersion quadratique autour de l'espérance. L'écart-type est sa racine carrée et possède la même unité que X. Une variance en secondes carrées et un écart-type en secondes ne sont pas interchangeables.

La linéarité $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ ne demande pas l'indépendance. En revanche, additionner les variances de deux variables demande des conditions, notamment l'indépendance dans le cadre étudié ici. Si $Y = X$, la variance de $X + Y$ vaut $4\,V(X)$, et non $2\,V(X)$. Ce contre-exemple montre pourquoi la condition ne peut pas être supprimée.

8. Construire la loi binomiale au lieu de la deviner

Un schéma de Bernoulli répète n épreuves indépendantes, chacune ayant deux issues et la même probabilité de succès p. La variable X compte le nombre de succès. Elle suit alors une loi binomiale de paramètres n et p. Vérifier les quatre éléments - répétition, deux catégories, probabilité constante et indépendance - précède le choix de cette loi.

Pour une séquence précise contenant k succès et n − k échecs, la probabilité vaut p^k (1 − p)^(n − k). Le nombre de séquences donnant exactement k succès est C(n,k), car il faut choisir les positions des succès. Ces séquences sont incompatibles, donc on additionne leurs probabilités identiques :

P(X = k) = C(n,k) p^k (1 − p)^(n − k).

Le coefficient binomial ne représente pas un facteur mystérieux ajouté à une puissance. Il corrige le fait qu'un même nombre de succès peut apparaître dans plusieurs ordres. Pour n = 3 et k = 2, les séquences succès-succès-échec, succès-échec-succès et échec-succès-succès sont distinctes, d'où le facteur trois.

La formule se complète naturellement aux cas p = 0 ou p = 1 par les lois certaines correspondantes, plutôt que par des manipulations ambiguës de 0^0. Quand p = 0, X vaut toujours zéro ; quand p = 1, X vaut toujours n. Ces cas limites offrent un contrôle conceptuel de la distribution.

9. Espérance, variance et portée des valeurs moyennes

Écrivons X comme somme de n variables de Bernoulli indépendantes X_1, …, X_n. Par linéarité, E(X) = n p. Par addition des variances indépendantes, V(X) = n p(1 − p). L'écart-type vaut √[n p(1 − p)]. Ces résultats sont associés au nombre de succès, pas à une fréquence ; la fréquence X/n possède une autre variance.

Dans quinze essais indépendants avec p = 0,80, le nombre moyen de succès vaut douze et la variance 2,4. L'écart-type est environ 1,55. Cela ne signifie pas que toutes les séries produiront douze succès ni que toutes resteront entre douze moins 1,55 et douze plus 1,55. L'espérance et l'écart-type résument la loi sans remplacer les probabilités d'événements précis.

Une espérance peut ne pas être entière alors que X l'est toujours. Avec trois essais de probabilité 0,50, l'espérance vaut 1,5 succès. Aucune expérience n'observe un succès et demi ; le nombre décrit une moyenne théorique. La distinction entre valeur possible et moyenne évite d'arrondir une espérance pour la traiter comme un résultat garanti.

Si la probabilité p dépend de l'essai, la somme de succès ne suit généralement plus la loi binomiale classique, même en cas d'indépendance. Son espérance peut toujours être obtenue en additionnant les probabilités individuelles. Il faut alors une autre méthode pour sa distribution ou sa variance. Un modèle légèrement plus compliqué peut être plus fidèle qu'une binomiale choisie par habitude.

10. Calculer des événements et résoudre un seuil

Pour dix essais indépendants avec p = 0,20, la probabilité de deux succès vaut C(10,2) × 0,20² × 0,80⁸, soit environ 0,302. La probabilité d'au moins un succès est 1 − 0,80¹⁰, environ 0,893. La seconde question se traite plus simplement par le complément ; additionner dix termes de la loi serait possible mais inutilement long.

Cherchons le plus petit nombre n d'essais indépendants de probabilité 0,20 pour que la probabilité d'au moins un succès atteigne 95 %. Il faut 1 − 0,80^n ≥ 0,95, donc 0,80^n ≤ 0,05. Le logarithme donne n ln 0,80 ≤ ln 0,05. Comme ln 0,80 est négatif, la division renverse le sens : n ≥ ln 0,05/ln 0,80, environ 13,43. Le plus petit entier est quatorze.

On contrôle les deux valeurs voisines : treize essais donnent environ 94,5 %, quatorze environ 95,6 %. Ce contrôle confirme à la fois l'arrondi entier et le caractère minimal. Une calculatrice affichant 13,43 ne répond pas directement à une question portant sur un nombre d'essais.

Pour une probabilité de type P(X ≤ k), on additionne les termes de zéro à k inclus. Pour P(X > k), on peut utiliser 1 − P(X ≤ k). L'inclusion du seuil doit être lue précisément : « plus de cinq » ne signifie pas « au moins cinq ». Une grande partie des erreurs de loi binomiale provient de cette traduction, même lorsque la formule et les paramètres sont corrects.

11. Exercices corrigés et interprétation

Exercice A. Former un comité de deux personnes parmi six, puis désigner une présidence parmi les deux. Il existe C(6,2) = 15 comités, et deux choix de présidence pour chacun : trente possibilités. On peut aussi choisir d'abord la personne présidente puis l'autre membre, soit 6 × 5. Les deux méthodes retrouvent trente parce qu'elles comptent les mêmes configurations.

Exercice B. Une urne contient quatre boules rouges et une bleue. Deux tirages sans remise sont effectués. La probabilité d'obtenir exactement une rouge vaut P(rouge puis bleue) + P(bleue puis rouge), soit (4/5)(1/4) + (1/5)(4/4) = 2/5. Utiliser une loi binomiale avec p = 4/5 serait inadapté, car la deuxième probabilité conditionnelle change.

Exercice C. Six essais indépendants ont une probabilité de succès égale à 1/2. La probabilité d'au moins cinq succès vaut [C(6,5) + C(6,6)]/2^6 = 7/64, environ 10,9 %. Le calcul inclut cinq et six. La symétrie de la loi donne la même probabilité pour au plus un succès, ce qui fournit un contrôle.

Exercice D. On définit un score Y = 3X − 2, où X suit une loi binomiale de paramètres dix et 0,20. Son espérance vaut 3 × 2 − 2 = 4. Sa variance vaut 9 × 1,6 = 14,4. Soustraire deux ne change pas la dispersion ; multiplier par trois multiplie l'écart-type par trois et la variance par neuf.

Exercice E. « Un événement a une probabilité de 1 %, donc il doit apparaître une fois dans cent essais. » Cette affirmation est fausse. Sous indépendance et probabilité constante, la probabilité de ne jamais l'observer dans cent essais vaut $0{,}99^{100}$, environ 36,6 %. L'espérance du nombre d'occurrences est bien un, mais elle n'impose pas le résultat de chaque série.

12. Ce qu'une résolution probabiliste doit rendre visible

Une solution doit décrire les événements avant de les noter, indiquer le protocole, justifier les conditionnements et rappeler les hypothèses permettant les produits. Elle doit présenter une probabilité entre zéro et un, ou un pourcentage correspondant, puis l'interpréter dans la bonne population. Une espérance, une fréquence et une probabilité conditionnelle ne peuvent pas être substituées l'une à l'autre.

La précision numérique doit être adaptée à la question. Pour comparer deux probabilités proches d'un seuil, on garde assez de chiffres jusqu'à la conclusion. Pour une illustration générale, trois chiffres significatifs peuvent suffire. Dans tous les cas, l'arrondi final ne doit pas masquer le sens d'une inégalité ni transformer une estimation en certitude.

Référence de cadrage

Le programme français de spécialité mathématiques de Terminale fournit le cadre des thèmes dénombrement, schéma de Bernoulli et sommes de variables. Les démonstrations, situations fictives et exercices ci-dessus sont originaux : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Chapitre 11 - Géométrie dans l'espace : vecteurs, plans et distances

Repère historique - Descartes : relier une figure à des équations

La Géométrie accompagne le Discours de la méthode de Descartes en 1637. La présentation institutionnelle de la BnF souligne sa démarche de conversion de problèmes géométriques en équations. Le rapprochement avec notre chapitre est la circulation entre objet géométrique et écriture algébrique : un vecteur, une droite ou un plan doivent garder leur sens lorsque l'on calcule leurs coordonnées. Ce jalon ne signifie pas que Descartes utilisait déjà tout notre formalisme vectoriel moderne en trois dimensions. Il aide à comprendre une méthode de représentation, sans remplacer le contrôle géométrique du résultat.

Source historique : Bibliothèque nationale de France - présentation institutionnelle : https://www.bnf.fr/fr/mediatheque/les-equations-la-methode-de-descartes-pour-resoudre-les-problemes-geometriques

1. Voir une figure sans lui demander de prouver

Une représentation de l'espace sur une feuille conserve certaines relations et en déforme d'autres. Deux segments dessinés parallèles peuvent représenter des directions différentes ; un angle droit peut ne pas paraître droit en perspective. La figure sert à organiser les points, les faces et les hypothèses. La démonstration repose sur des relations géométriques ou algébriques établies, pas sur la seule impression visuelle.

Un cube dessiné en perspective invite par exemple à distinguer une diagonale de face et une diagonale du solide. La première appartient à un plan de face, la seconde relie deux sommets opposés à travers l'espace. Dans un cube d'arête a, leurs

longueurs sont respectivement a√2 et a√3. Le dessin ne permet pas de les comparer avec une règle si la projection raccourcit différemment les directions.

La géométrie repérée traduit les configurations en coordonnées et en équations. Elle ne supprime pas la géométrie : elle fournit un autre langage pour exprimer l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité ou l'intersection. Une résolution complète doit revenir au sens spatial après le calcul. Un système sans solution signifie quelque chose sur les objets étudiés ; ce n'est pas seulement un résultat technique.

2. Points, vecteurs et repères : trois objets différents

Un point décrit une position. Un vecteur décrit un déplacement orienté ou une direction assortie d'une amplitude. Dans un repère, les coordonnées du vecteur AB sont celles de B moins celles de A. Si A = (1,2,−1) et B = (4,0,3), alors AB = (3,−2,4). Il serait faux d'appeler « coordonnées de AB » celles de B seules, sauf si A est l'origine du repère.

Un vecteur peut être représenté par des segments orientés situés en différents lieux. L'égalité de deux vecteurs signifie même direction, même sens et même longueur, pas nécessairement mêmes extrémités. Cette distinction permet d'utiliser les côtés d'un parallélogramme ou d'un cube sans confondre déplacement et position absolue.

Une base de l'espace comprend trois vecteurs tels que tout vecteur s'exprime de manière unique comme leur combinaison linéaire. Dans un repère orthonormé, les vecteurs de base sont unitaires et deux à deux orthogonaux. Les formules usuelles de norme et de produit scalaire en coordonnées reposent sur cette propriété. Elles ne s'appliquent pas sans modification à une base quelconque.

Par exemple, si deux vecteurs de base unitaires font un angle de soixante degrés, la somme de ces deux vecteurs a une norme $\sqrt{3}$, et non $\sqrt{2}$. Les coordonnées seules ne suffisent donc pas à calculer une longueur sans connaître la géométrie de la base. Dans les exercices de ce chapitre, le repère est orthonormé sauf indication explicite.

3. Combinaisons linéaires, colinéarité et coplanarité

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si l'un est un multiple réel de l'autre. Le multiplicateur peut être positif ou négatif ; son signe indique le même sens ou le sens opposé. Pour vérifier la colinéarité en coordonnées, on cherche un coefficient commun à toutes les composantes. On ne divise pas aveuglément par une composante qui pourrait être nulle.

Les vecteurs $(2,-1,0)$ et $(-6,3,0)$ sont colinéaires avec coefficient -3. Les vecteurs $(2,-1,0)$ et $(-6,3,1)$ ne le sont pas, car la troisième composante empêcherait l'égalité. Le vecteur nul est une combinaison linéaire de tout vecteur, mais ne constitue pas une direction de droite. Cette particularité doit être gardée à l'esprit lorsqu'une preuve utilise un vecteur directeur.

Trois points A, B et C sont alignés lorsque AB et AC sont colinéaires. Pour montrer que quatre points sont coplanaires, on peut chercher si AD est une combinaison de AB et AC, lorsque ces derniers ne sont pas colinéaires. On résout alors $\mathrm{AD} = \alpha\,\mathrm{AB} + \beta\,\mathrm{AC}$. L'existence d'une solution signifie que D appartient au plan passant par A et engendré par ces deux directions.

Considérons A à l'origine, $\mathrm{AB} = (1,0,1)$ et $\mathrm{AC} = (0,1,1)$. Tout point du plan possède les coordonnées $(\alpha,\beta,\alpha+\beta)$. L'équation du plan est donc $z = x + y$. Le point $(1,1,2)$ y appartient ; le point $(1,1,3)$ n'y appartient pas. Cette lecture relie directement combinaison linéaire et équation cartésienne.

Lorsque les deux vecteurs choisis sont colinéaires, ils n'engendrent qu'une droite. Il faut alors choisir d'autres directions pour décrire le plan, ou traiter un cas dégénéré. Une formule écrite avec deux paramètres n'est pas automatiquement une représentation de plan si les directions ne sont pas indépendantes.

4. Représenter une droite avec un paramètre

Une droite passant par A et de vecteur directeur non nul u est l'ensemble des points M tels que AM = t u, où t parcourt les réels. Si A = (a,b,c) et u = (u_1,u_2,u_3), on écrit x = a + t u_1, y = b + t u_2, z = c + t u_3. Les trois coordonnées dépendent du même paramètre t. Employer trois paramètres indépendants décrirait un autre ensemble.

Le choix du point de départ et de la longueur du vecteur directeur n'est pas unique. Remplacer u par 2u conserve la droite ; le paramètre est simplement regradué. Remplacer A par un autre point de la droite conserve aussi l'ensemble. Deux écritures différentes peuvent donc représenter exactement le même objet.

Pour tester l'appartenance d'un point, on cherche une seule valeur de t qui satisfait simultanément toutes les coordonnées. Pour la droite (1 + 2t, t, 2 − t), le point (3,1,1) correspond à t = 1 dans les trois équations. Le point (3,1,2) ne convient pas : les deux premières imposent t = 1, mais la troisième donnerait un.

Une droite entière, une demi-droite et un segment se distinguent par l'ensemble des valeurs du paramètre. Pour le segment de A à B, l'écriture A + t AB avec t entre zéro et un est adaptée. Si t parcourt tous les réels, elle décrit la droite, y compris au-delà des extrémités. Oublier la restriction pourrait donner une intersection située hors du segment réellement étudié.

5. Produit scalaire, norme et angle

Dans un repère orthonormé, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. La norme de u est $\sqrt{(u \cdot u)}$. Pour des vecteurs non nuls, le produit scalaire est aussi égal à $||u|| \, ||v|| \cos \theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs, compris entre zéro et π. Les deux expressions relient calcul en coordonnées et interprétation géométrique.

Deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Pour $u = (1,2,-1)$ et $v = (2,-1,0)$, le produit vaut deux moins deux, donc zéro. La vérification exige toutes les composantes ; la perpendicularité apparente de leurs projections sur une figure ne suffit pas.

Dans un cube d'arête un, le vecteur d'une arête peut être (1,0,0) et celui d'une diagonale du solide (1,1,1). Le cosinus de leur angle vaut $1/\sqrt{3}$. L'angle est donc environ 54,7 degrés. Il ne vaut pas quarante-cinq degrés, angle qui convient à une diagonale de face avec une arête de cette face. Les deux configurations sont différentes.

Le développement $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2u \cdot v + ||v||^2$ permet de retrouver le théorème de Pythagore lorsque le produit scalaire est nul. Il permet aussi d'exprimer le produit scalaire à partir de longueurs. Le signe du terme croisé indique si la somme est plus ou moins longue que dans le cas orthogonal.

Deux droites de directions orthogonales ne sont pas nécessairement sécantes. Dans l'espace, la droite (t,0,0) et la droite (0,1,s) ont des directions orthogonales, mais aucun point commun puisque leurs deuxièmes coordonnées restent zéro et un. On parle d'orthogonalité de directions ; parler de droites perpendiculaires ajoute habituellement une rencontre. La nuance évite d'importer trop vite une intuition du plan.

6. Définir un plan par un vecteur normal

Un vecteur normal non nul n est orthogonal à toutes les directions d'un plan. Si le plan passe par A, un point M y appartient lorsque n·AM = 0. Pour n = (a,b,c) et A = (x_A,y_A,z_A), on obtient a(x − x_A) + b(y − y_A) + c(z − z_A) = 0, soit une équation a x + b y + c z + d = 0.

Au moins l'un des coefficients a, b et c doit être non nul. Sinon, l'équation serait une identité ou une contradiction, pas une équation de plan. Multiplier tous les coefficients par une même constante non nulle conserve le plan. Le vecteur normal n'est donc pas unique, et son sens n'impose pas une orientation obligatoire au plan.

Le plan x + 2y − z − 3 = 0 possède le vecteur normal (1,2,−1) et contient A = (3,0,0). Le point (1,1,0) lui appartient aussi. Une direction de vecteur u appartient à ce plan si n·u = 0 ; un point appartient au plan si ses coordonnées satisfont l'équation. Confondre ces deux tests revient à oublier le terme constant qui fixe la position.

Pour construire un normal à partir de deux directions non colinéaires, on peut chercher n dont le produit scalaire avec chacune est nul, en résolvant un système. Il n'est pas nécessaire d'introduire une technique non étudiée pour résoudre un cas simple. Le produit vectoriel constitue une autre méthode, mais il relève ici d'un éventuel complément, pas d'un prérequis caché.

7. Positions relatives : le système donne une conclusion géométrique

Pour intersecter une droite A + t u avec un plan n·M + d = 0, on remplace les coordonnées de M. On obtient n·A + d + t(n·u) = 0. Si n·u est non nul, il existe une valeur unique de t et donc un point d'intersection unique. Si n·u vaut zéro, la droite est parallèle au plan ; elle est contenue dans le plan si n·A + d vaut aussi zéro, sinon elle ne le rencontre pas.

La droite M(t) = (1 + 2t, t, 2 − t) et le plan x + 2y − z − 3 = 0 donnent −4 + 5t = 0. L'intersection correspond à t = 4/5 et au point (13/5,4/5,6/5). On contrôle ce point dans l'équation du plan. Si le même paramétrage décrivait un segment avec t entre zéro et un, l'intersection resterait admissible ; avec t entre deux et trois, elle ne le serait plus.

Pour deux droites, on utilise des paramètres distincts t et s, puis on égalise leurs coordonnées. Une solution unique donne une rencontre. Aucune solution peut correspondre à des droites parallèles distinctes ou à des droites gauches ; les directions permettent de distinguer ces situations. Une infinité de solutions peut exprimer la coïncidence, lorsque les droites décrivent le même ensemble.

Deux plans dont les normales sont colinéaires sont parallèles ou confondus. Avec des normales non colinéaires, leur intersection est une droite. Par exemple, les plans x + y + z = 1 et x − y = 0 donnent x = y = t et z = 1 − 2t. La droite d'intersection a pour direction (1,1,−2). Chaque point proposé doit satisfaire les deux équations, pas seulement l'une.

8. Projeté orthogonal sur une droite

Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite de point A et de direction u appartient à la droite et vérifie MH orthogonal à u. En écrivant H = A + t u, la condition devient (A + t u − M)·u = 0. Comme u est non nul, on obtient t = [(M − A)·u]/||u||².

Pour A à l'origine, u = (1,1,0) et M = (2,2,1), on trouve t = 4/2 = 2. Le projeté est H = (2,2,0), et la distance de M à la droite vaut un. Si le vecteur directeur avait été remplacé par (2,2,0), le paramètre aurait été un ; le point H et la distance seraient identiques.

Pourquoi cette distance est-elle minimale ? Pour tout autre point P de la droite, MH est orthogonal à HP. Le théorème de Pythagore donne MP² = MH² + HP², donc MP ≥ MH. L'égalité exige P = H. Cette démonstration relie la construction au problème d'optimisation plutôt que de présenter une formule de distance sans raison.

La distance à un segment peut demander une étape supplémentaire. Si le projeté sur la droite se trouve hors du segment, le point du segment le plus proche est une extrémité. Le problème n'est plus exactement celui d'une droite infinie. Vérifier la valeur du paramètre évite une distance correcte pour le mauvais objet.

9. Projeté orthogonal sur un plan

Pour le plan a x + b y + c z + d = 0, de normal n = (a,b,c), le projeté H de M se trouve sur la droite passant par M de direction n. On peut écrire H = M − α n. La condition d'appartenance au plan donne α = (a x_M + b y_M + c z_M + d)/(a² + b² + c²).

Pour M = (1,1,4) et le plan x + 2y − z − 3 = 0, le numérateur vaut −4 et le dénominateur six. On obtient H = M + (2/3)(1,2,−1), soit H = (5/3,7/3,10/3). La substitution dans le plan donne zéro. Le

vecteur MH est colinéaire au normal ; les deux critères du projeté sont donc vérifiés.

La distance au plan est la norme de MH, soit |a x_M + b y_M + c z_M + d|/√(a² + b² + c²). Dans l'exemple, elle vaut 4/√6, environ 1,63 unité de longueur. La valeur absolue supprime le signe lié au côté du plan ; une distance ne peut pas être négative.

Le caractère minimal se prouve comme pour la droite. Pour tout point P du plan, HP est une direction du plan, donc orthogonale à MH. Ainsi MP² = MH² + HP². Le point H est le seul à atteindre la distance minimale. La formule n'est donc pas seulement un calcul pratique : elle répond à une propriété géométrique démontrée.

10. Lieux géométriques et volumes

Le plan médiateur du segment AB est l'ensemble des points équidistants de A et de B. En développant MA² = MB², les termes quadratiques en coordonnées de M se simplifient et l'on obtient une équation de plan. Ce plan passe par le milieu du segment et possède AB comme vecteur normal. Pour A = (0,0,0) et B = (2,0,0), son équation est x = 1.

Une sphère de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que OM = r. Dans un repère orthonormé centré en O, son équation est x² + y² + z² = r². Le solide plein correspondant utilise une inégalité inférieure ou égale. La surface et le volume ne sont pas le même ensemble.

La sphère x² + y² + z² = 4 rencontre le plan z = 1 selon le cercle x² + y² = 3, situé dans ce plan et de rayon √3. Un plan à distance supérieure à deux du centre ne la rencontre pas ; à distance exactement deux, il lui est tangent. Ces cas se comprennent par la distance du centre au plan, avant tout calcul détaillé.

Pour un tétraèdre de sommets O = (0,0,0), A = (2,0,0), B = (0,3,0), C = (0,0,4), la base OAB est un triangle rectangle d'aire trois. La hauteur issue de C vaut quatre. Le volume est donc un tiers de trois fois quatre, soit quatre unités de volume. Une aire de base et une hauteur doivent être perpendiculaires dans la définition utilisée ; la longueur d'une arête oblique n'est pas toujours la hauteur.

11. Exercices corrigés et contrôles

Exercice A. Les points A = (1,0,2), B = (3,1,1) et C = (5,2,0) sont-ils alignés ? AB = (2,1,−1) et AC = (4,2,−2) = 2 AB. Ils sont alignés. Le coefficient deux signifie que C se trouve sur la même direction depuis A, deux fois plus loin que B ; il n'est pas entre A et B.

Exercice B. Trouver le plan passant par A = (1,0,2) et normal à n = (2,−1,3). L'équation est 2(x − 1) − y + 3(z − 2) = 0, soit 2x − y + 3z − 8 = 0. On vérifie d'abord A ; la direction (1,2,0) est bien une direction du plan puisque son produit scalaire avec n vaut zéro.

Exercice C. La droite (t,2 − t,1) appartient-elle au plan x + y + z = 3 ? La somme des coordonnées vaut toujours trois. Toute la droite est donc contenue dans le plan, pas seulement le point obtenu pour une valeur particulière de t. Une substitution symbolique permet ici une conclusion plus forte qu'un test numérique isolé.

Exercice D. Calculer la distance de M = (0,0,0) au plan 2x − y + 2z − 6 = 0. Le numérateur en valeur absolue est six et la norme du normal trois. La distance vaut deux. Multiplier l'équation du plan par cinq multiplie numérateur et dénominateur par cinq ; le résultat doit rester inchangé.

Exercice E. Une droite de direction (1,0,0) et une droite de direction (0,1,0) sont-elles nécessairement sécantes ? Non. Leurs directions sont orthogonales, mais elles peuvent appartenir à des

plans horizontaux distincts. Pour conclure à une rencontre, il faut aussi étudier leurs points et résoudre les conditions d'intersection.

12. Organiser une preuve dans l'espace

La méthode dépend de la question. Pour une appartenance, on substitue des coordonnées ou on cherche un paramètre. Pour un parallélisme, on compare des directions ou des normales. Pour une orthogonalité, on utilise un produit scalaire en précisant les objets concernés. Pour une distance minimale, on construit un projeté et on justifie le minimum par Pythagore. Cette classification transforme une figure complexe en une succession de tests ciblés.

Les calculs doivent conserver leur interprétation. Une valeur du paramètre n'est pas une distance ; un vecteur normal n'est pas un point ; une équation vérifiée par un point ne décrit pas automatiquement une droite entière. Après chaque étape, reformulez ce que le résultat établit et ce qu'il reste à montrer. Cette discipline permet d'utiliser l'algèbre sans perdre l'objet géométrique.

Référence de cadrage

Programme français de spécialité mathématiques de Terminale, parties vecteurs, orthogonalité et représentations de l'espace. Les configurations et les démonstrations pédagogiques sont originales : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Chapitre 12 - Statistiques, concentration et démarches algorithmiques

Repère historique - Bienaymé et Chebyshev : borner les écarts

Bienaymé publie en 1853 l'inégalité aujourd'hui associée aux noms de Bienaymé et de Chebyshev ; Chebyshev la publie à son tour en 1867. Cette histoire éclaire le rôle d'une borne probabiliste : elle peut contrôler un risque d'écart sans décrire exactement toute la distribution. Le chapitre distingue ainsi une fréquence observée, une probabilité théorique et une majoration parfois peu précise mais valable sous ses hypothèses. Ce repère ne garantit pas qu'un échantillon particulier sera proche de la moyenne et n'attribue pas la découverte à un seul nom.

Source historique : University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bienayme/

1. Décrire des données avant de les interpréter

Une série de nombres ne possède pas un sens indépendant de son origine. On demande quelle grandeur est mesurée, dans quelle unité, sur quelle population, à quelles dates et selon quel protocole. Des durées, des masses et des catégories codées par des nombres ne se traitent pas de la même façon. Un code postal n'est pas une grandeur dont la moyenne aurait une signification géographique directe.

La statistique descriptive résume les données disponibles. L'inférence cherche à en tirer une information sur une population ou un mécanisme au-delà de ces observations. Le passage de l'une à l'autre exige des hypothèses d'échantillonnage. Un graphique sur

cent réponses volontaires peut décrire ces réponses ; il ne représente pas automatiquement tous les habitants d'un territoire.

Avant de calculer, vérifiez les valeurs manquantes, les doublons, les changements d'unité et les catégories. Une valeur absente ne doit pas être remplacée par zéro sans justification. Zéro est une valeur, et son introduction peut déplacer une moyenne ou une proportion. De même, un doublon n'est pas toujours une répétition indépendante ; il peut être une erreur de saisie.

Une synthèse honnête conserve l'effectif et la méthode de collecte près du résultat. Dire « la moyenne vaut six » ne permet pas d'évaluer une série sans son unité, sa dispersion ni son effectif. La précision d'affichage ne crée pas une précision d'information : écrire six avec dix décimales ne corrige ni une mesure grossière ni une sélection biaisée.

2. Moyenne, médiane et dispersion

Pour n observations x_1, …, x_n, la moyenne arithmétique est la somme divisée par n. Elle utilise toutes les valeurs et peut être sensible à des observations extrêmes. Pour des groupes d'effectifs différents, la moyenne globale doit pondérer les moyennes de groupe par leurs effectifs ; la simple moyenne des moyennes n'est correcte que dans des cas particuliers.

La médiane partage une série ordonnée en deux parties. Avec un effectif impair, elle correspond à la valeur centrale. Avec un effectif pair, on utilise habituellement la moyenne des deux valeurs centrales comme convention de calcul. Cette convention doit être connue lorsqu'on compare des logiciels ou des présentations. Les quartiles demandent eux aussi une convention explicite : certaines méthodes choisissent des valeurs observées, d'autres interpolent.

Pour la série 2, 3, 3, 4, 18, la moyenne vaut six et la médiane trois. La valeur dix-huit tire la moyenne vers le haut. Cela ne rend pas la

moyenne fausse ; cela montre qu'elle ne décrit pas seule une valeur « typique ». Selon la question, on peut présenter ensemble moyenne, médiane et dispersion plutôt que choisir l'indicateur qui soutient le mieux une conclusion souhaitée.

La variance descriptive avec diviseur n est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. Elle peut aussi être calculée comme la moyenne des carrés moins le carré de la moyenne. Dans la série précédente, la moyenne des carrés vaut 72,4 et le carré de la moyenne trente-six ; la variance vaut donc 36,4 et l'écart-type environ 6,03. L'écart-type garde l'unité des observations, la variance son carré.

Une variance d'échantillon avec diviseur n − 1 répond à une autre convention et à un objectif d'estimation particulier. Ce n'est pas une correction à appliquer automatiquement à toute série descriptive. Avant d'utiliser une commande de calcul, il faut savoir quel diviseur et quelle finalité elle adopte. Deux résultats différents peuvent venir de cette convention, sans erreur arithmétique.

3. Pondérations et effets de composition

Deux groupes ont des moyennes respectives de dix et vingt. Si le premier contient quatre-vingt-dix observations et le second dix, la moyenne globale vaut onze, et non quinze. La pondération exprime la quantité d'information de chaque groupe. Elle ne peut pas être remplacée par un choix intuitif lorsque les effectifs sont connus.

Les comparaisons entre populations peuvent changer avec leur composition. Supposons deux activités fictives, l'une facile et l'autre difficile. Une organisation peut avoir un meilleur taux de réussite dans chaque activité et pourtant un taux global inférieur si elle traite beaucoup plus de cas difficiles. Avant d'annoncer une supériorité globale, on examine les catégories et les répartitions.

Ce phénomène ne justifie pas d'écarter tout indicateur agrégé. Il invite à expliciter la question : veut-on mesurer la performance dans une catégorie comparable, ou le résultat total d'une organisation dans son activité réelle ? Ces deux questions ont un intérêt, mais ne demandent pas nécessairement la même pondération. La rigueur consiste à ne pas passer silencieusement de l'une à l'autre.

Un graphique doit également conserver une échelle lisible. Un axe vertical tronqué peut faire paraître énorme une variation faible ; une échelle logarithmique peut être utile pour comparer des rapports, mais elle doit être annoncée. La représentation n'est pas une preuve supplémentaire indépendante des nombres qu'elle dessine.

4. Sommes et moyennes de variables aléatoires

Considérons n variables indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ² finie. Leur somme S_n possède l'espérance nμ et la variance nσ². Leur moyenne M_n = S_n/n possède l'espérance μ et la variance σ²/n. Son écart-type vaut σ/√n. Cette relation exprime la diminution de dispersion de la moyenne dans ce modèle de répétition.

Diviser l'écart-type par deux demande donc de multiplier la taille de l'échantillon par quatre, pas par deux. Multiplier n par cent divise l'écart-type de la moyenne par dix. L'amélioration ne progresse pas linéairement avec le nombre d'observations. Cette dépendance explique le coût d'une précision accrue dans un échantillonnage.

Les hypothèses sont essentielles. Si toutes les observations répètent la même erreur aléatoire commune, leur moyenne ne bénéficie pas de la même réduction. Si les valeurs ne suivent pas la même loi, leur interprétation demande une adaptation. Si une

méthode de collecte sélectionne toujours la même catégorie, un grand effectif peut rendre très précise une moyenne qui ne représente pas la population recherchée.

La relation $\sigma/\sqrt{n}$ est une propriété théorique de la loi de la moyenne, pas la promesse que chaque moyenne observée se trouvera exactement à cette distance de μ. Elle ne signifie pas non plus que l'écart-type des observations individuelles diminue lorsque l'on recueille davantage de données. Les observations gardent leur distribution ; c'est leur moyenne qui devient moins dispersée dans le modèle.

5. Démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Pour une variable X d'espérance μ et de variance finie V, et pour δ strictement positif, l'inégalité affirme :

$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$.

Elle relie la probabilité d'un écart important à une mesure de dispersion. Si le membre de droite dépasse un, la borne reste mathématiquement vraie mais apporte moins que la borne élémentaire d'une probabilité par un. On peut alors retenir le minimum des deux valeurs.

Une preuve courte consiste à poser $Y = (X - \mu)^2$, variable positive ou nulle. Sur l'événement $|X - \mu| \geq \delta$, on a $Y \geq \delta^2$. L'espérance de Y est au moins δ^2 multiplié par la probabilité de cet événement, puisque les autres contributions ne sont pas négatives. Or $E(Y) = V$. En divisant par δ^2, on obtient l'inégalité. Cette démonstration montre pourquoi le carré et la positivité interviennent.

L'inégalité ne suppose pas une loi normale. Sa généralité est un avantage, mais la borne peut être large. Un résultat $P \leq 0{,}20$ ne signifie pas que la probabilité vaut 0,20. La vraie probabilité peut

être bien plus petite. Confondre une majoration avec une égalité ferait perdre le sens même de l'outil.

L'événement contient les écarts supérieurs ou égaux au seuil annoncé. Lorsque X est discrète, l'inclusion de la frontière peut compter. Il faut traduire la condition avant de calculer une probabilité exacte ou de comparer celle-ci à une borne.

6. Concentration d'une moyenne et loi des grands nombres

En appliquant l'inégalité à M_n, dont la variance vaut σ²/n, on obtient P(|M_n − μ| ≥ δ) ≤ σ²/(nδ²). Pour un δ positif fixé, le membre de droite tend vers zéro lorsque n augmente. Ainsi, la probabilité d'un écart d'au moins δ devient arbitrairement petite dans le modèle. C'est une forme de loi des grands nombres.

La conclusion porte sur une probabilité, pas sur une évolution monotone de chaque suite de moyennes observées. Une nouvelle observation peut éloigner provisoirement la moyenne de μ. La loi ne dit pas davantage qu'une série future compensera obligatoirement une série passée. Après plusieurs échecs indépendants, la probabilité de succès au prochain essai reste p ; elle n'augmente pas pour « rétablir l'équilibre ».

Pour une fréquence F_n de succès dans un schéma de Bernoulli, μ = p et σ² = p(1 − p). La borne devient P(|F_n − p| ≥ δ) ≤ p(1 − p)/(nδ²). Comme p(1 − p) ≤ 1/4 pour tout p entre zéro et un, on dispose d'une borne uniforme 1/(4nδ²), même si p est inconnu.

Pour assurer une majoration de 5 % de la probabilité d'un écart d'au moins 0,05, la borne uniforme demande n ≥ 1/(4 × 0,05 × 0,05²), soit deux mille. Il s'agit d'une taille suffisante selon cette inégalité, pas nécessairement de la plus petite taille possible pour une loi particulière. Si l'on vise 0,02 avec le même risque majoré, la taille suffisante devient douze mille cinq cents.

Ces nombres reposent sur des essais indépendants et une probabilité constante. Ils ne garantissent pas la représentativité d'un sondage volontaire ni la validité d'un questionnaire. Un effectif ne répare pas à lui seul un biais de sélection. La précision probabiliste et la pertinence du protocole sont deux exigences différentes.

7. Ce que l'on peut dire après une observation

Avant de réaliser les essais, F_n est une variable aléatoire. Après les avoir réalisés, sa valeur f est une donnée. La borne de concentration fournit un contrôle sur les répétitions possibles de la procédure. Elle n'attribue pas, à elle seule, une probabilité postérieure au paramètre p après observation de f.

On peut construire un intervalle autour de la fréquence observée avec une garantie de couverture issue d'une méthode annoncée. Cela signifie que, dans les répétitions du protocole conformes aux hypothèses, la procédure produit des intervalles contenant p avec une fréquence contrôlée. Cela ne doit pas être reformulé sans autre cadre comme « ce paramètre fixe a maintenant telle probabilité d'être dans cet intervalle ».

Au niveau de la révision, il suffit souvent de distinguer estimation, incertitude et garantie. Une fréquence de 0,42 n'établit pas p = 0,42 exactement. Une borne de risque n'établit pas que la procédure réussira dans chaque cas. Une confiance élevée dans un cadre statistique ne supprime pas la possibilité d'un protocole mal conçu.

Lorsque la décision concerne des personnes, un système technique ou un phénomène sensible, l'analyse statistique n'est qu'un élément du raisonnement. Le coût des erreurs, les contraintes et la validité de la mesure doivent aussi être examinés. Ce guide ne

transforme pas une méthode de concentration en conseil médical ou financier personnalisé.

8. Concevoir un algorithme avec invariant et terminaison

Un algorithme est une suite d'instructions dont on peut expliquer le résultat. Il ne suffit pas qu'un programme affiche un nombre plausible. On précise ses entrées, leur domaine, sa sortie, les étapes et les conditions d'arrêt. Une boucle doit être accompagnée d'une propriété conservée, appelée invariant, et d'un argument expliquant pourquoi elle termine lorsque cela est demandé.

Dans une dichotomie, l'invariant est que l'intervalle courant contient une solution, sous les hypothèses de continuité et de changement de signe utilisées. Sa longueur est divisée par deux à chaque étape. La terminaison pour une tolérance positive découle de cette diminution géométrique. La preuve ne dépend pas d'un langage informatique particulier.

Pour trouver le plus petit entier n tel que q^n ≤ a, avec 0 < q < 1 et 0 < a < 1, on peut initialiser n à zéro et une variable v à un, puis multiplier v par q et augmenter n tant que v > a. L'invariant est v = q^n. La convergence de q^n vers zéro assure la terminaison en arithmétique exacte. Une implémentation numérique doit aussi considérer l'arrondi et les limites de représentation.

Le test de condition doit correspondre au seuil voulu. Remplacer v > a par v ≥ a change la réponse lorsque l'égalité est possible. C'est une erreur logique, pas un détail esthétique. Tester un cas où le seuil est atteint exactement peut révéler un défaut invisible sur des valeurs ordinaires.

9. Simulation : explorer une loi sans la démontrer

Une simulation de Bernoulli peut produire une valeur uniforme U entre zéro et un, puis compter un succès si U < p. Répéter cette étape n fois simule une série dans le modèle numérique choisi. Répéter des séries permet d'observer la distribution des nombres de succès ou des fréquences.

Les nombres utilisés sont généralement pseudo-aléatoires : ils proviennent d'un mécanisme déterministe initialisé par une graine. Fixer cette graine peut faciliter la reproduction d'une étude. Cela ne transforme pas le générateur en source adaptée à toutes les applications, notamment celles qui demandent des propriétés de sécurité. Ici, il sert uniquement à une exploration pédagogique.

Une simulation permet de conjecturer une relation, de contrôler une formule ou de voir la dispersion. Elle ne prouve pas une identité valable pour tous les paramètres. Si une probabilité rare n'apparaît dans aucune des mille séries simulées, on ne peut pas conclure qu'elle est nulle. Le nombre de séries et la variabilité doivent accompagner la conclusion.

On peut aussi estimer une intégrale par simulation. Pour U uniforme sur [0,1], l'espérance de U^2 vaut l'intégrale de x^2 sur cet intervalle, soit un tiers. La moyenne de nombreuses valeurs U^2 approche cette quantité dans les conditions du modèle. La variance individuelle vaut $1/5 - 1/9 = 4/45$; pour dix mille observations indépendantes, l'écart-type théorique de la moyenne est environ 0,00298. Un résultat proche de 0,33 est attendu, mais ne constitue pas une démonstration du résultat exact.

10. Stabilité numérique et vérifications indépendantes

Une identité exacte peut conduire à un calcul numérique fragile. Soustraire deux nombres très proches peut perdre une partie des chiffres significatifs. Calculer des factorielles énormes puis les diviser peut dépasser les capacités d'une représentation alors que le coefficient binomial final reste gérable. L'organisation des opérations compte donc aussi.

Pour une loi binomiale avec $0 < p < 1$, on peut partir de $q_0 = (1 - p)^n$ et calculer successivement $q_{k+1} = q_k \times (n - k)/(k + 1) \times p/(1 - p)$. Cette récurrence évite le calcul répété des factorielles. Elle ne règle pas tous les problèmes : pour de très grands n, q_0 peut devenir numériquement trop petit, et un autre traitement serait nécessaire. Les cas $p = 0$ et $p = 1$ doivent être traités séparément.

Un contrôle utile consiste à vérifier que toutes les probabilités sont positives et que leur somme est proche de un dans la précision disponible. On peut vérifier l'espérance calculée à partir de la distribution et la comparer à $n\,p$. Ces contrôles ne remplacent pas une preuve de l'algorithme, mais détectent des erreurs de paramètre ou d'indice.

Pour la racine carrée de deux, une itération de Newton donne $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ avec $u_0 = 1$. Les premières valeurs sont 1,5 puis environ 1,41667. À partir de u_1, les valeurs restent au-dessus de $\sqrt{2}$ et décroissent. Si $e_n = u_n - \sqrt{2}$, on peut établir $e_{n+1} = e_n^2/(2u_n)$, relation qui explique l'amélioration rapide dans ce cas. Elle n'autorise pas une garantie de convergence de toute méthode de Newton sur toute fonction.

11. Exercices corrigés et discussion

Exercice A. Deux groupes de dix et trente personnes possèdent des moyennes respectives de douze et seize. La moyenne globale vaut (10 × 12 + 30 × 16)/40 = quinze. La valeur quatorze, moyenne non pondérée des deux moyennes, attribuerait aux groupes le même poids malgré leurs effectifs différents.

Exercice B. Une variable possède une espérance dix et une variance quatre. Quelle majoration donne Bienaymé-Tchebychev pour un écart d'au moins cinq ? La borne vaut 4/25 = 0,16. Il est correct de dire que la probabilité est au plus 16 %. Il serait incorrect de dire qu'elle vaut exactement 16 % ou que 84 % des valeurs sont nécessairement réparties uniformément dans l'intervalle central.

Exercice C. Des variables indépendantes de même loi ont une variance neuf. Pour leur moyenne sur cent observations, la variance vaut 0,09 et l'écart-type 0,30. Sur quatre cents observations, l'écart-type vaut 0,15. La diminution par deux correspond à la multiplication de l'effectif par quatre, conformément à la dépendance en racine carrée.

Exercice D. Pour une fréquence de Bernoulli de paramètre p = 0,40 et n = mille, majorer la probabilité d'un écart d'au moins 0,05. On trouve 0,40 × 0,60/(1 000 × 0,05²) = 0,096. La borne uniforme donnerait 0,10. La connaissance de p améliore légèrement cette majoration, mais ne donne pas la probabilité exacte.

Exercice E. Un programme initialise v à un et multiplie v par 0,5 tant que v ≥ 0,125. Il s'arrête à v = 0,0625 après quatre multiplications. Pour chercher le premier rang où v ≤ 0,125, le test devrait être v > 0,125 et l'arrêt interviendrait après trois multiplications. L'analyse du cas d'égalité révèle la différence de question.

Exercice F. Une centaine de volontaires choisissent de répondre à une enquête après avoir lu un message sur une difficulté qu'ils rencontrent. Peut-on appliquer une garantie d'échantillonnage indépendant représentatif à tous les utilisateurs ? Pas sans justification. Les volontaires peuvent avoir des caractéristiques différentes de ceux qui ne répondent pas. Augmenter le nombre de volontaires ne supprime pas automatiquement ce biais.

12. Construire une révision de synthèse

Pour chaque notion, préparez une définition, une propriété avec ses hypothèses, une démonstration courte, un exercice et un contre-exemple. Pour les probabilités, le contre-exemple peut porter sur l'indépendance ; pour l'analyse, sur une continuité absente ; pour la géométrie, sur une intersection supposée à tort ; pour les algorithmes, sur une condition de boucle mal traduite.

Une bonne synthèse ne récite pas toutes les formules. Elle choisit celle qui correspond à la question et explique pourquoi les autres seraient insuffisantes. Elle conserve la distinction entre démonstration, approximation et simulation. Elle vérifie enfin que la réponse se rapporte au problème initial, avec une précision et une interprétation adaptées.

Références de cadrage

Programme français de spécialité mathématiques de Terminale, pour les thèmes concentration, loi des grands nombres et algorithmique ; toutes les situations et explications sont originales : https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

NIST, repères descriptifs sur les indicateurs de position, consultés pour distinguer moyenne et médiane sans reprendre ses formulations : https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda351.htm

Annexes - Problèmes longs, corrections et stratégies de révision

A. Étudier une famille de fonctions avec un paramètre

On considère f_a(x) = ln x − a x sur les réels strictement positifs, où a est un paramètre strictement positif. Il faut distinguer l'inconnue x et le paramètre a. Pendant l'étude d'une fonction de la famille, a reste fixé. La dérivée est f_a'(x) = 1/x − a ; elle est positive avant x = 1/a, nulle en ce point et négative ensuite.

La fonction admet donc un maximum en 1/a. Sa valeur vaut ln(1/a) − 1, soit −ln a − 1. La limite en zéro par valeurs positives est moins l'infini. La limite en plus l'infini est également moins l'infini, car le terme linéaire négatif domine le logarithme pour a fixé positif. Ces limites et les variations permettent de compter les solutions de f_a(x) = 0.

Si a < 1/e, le maximum est strictement positif. La continuité et la stricte monotonie sur chacun des deux intervalles de variation donnent alors deux solutions distinctes, l'une avant 1/a et l'autre après. Si a = 1/e, le maximum est nul : l'unique solution est x = e. Si a > 1/e, le maximum est négatif et aucune solution n'existe. On a obtenu une classification de toute la famille, sans devoir calculer explicitement chaque racine.

Le raisonnement sépare existence et unicité. La continuité avec des valeurs de signes opposés assure une racine ; la stricte monotonie sur l'intervalle considéré assure qu'il n'y en a pas deux. Le maximum et les limites permettent de décider sur quels intervalles ces arguments s'appliquent. Une simple lecture graphique pourrait suggérer le résultat, mais ne justifierait pas tous les paramètres.

La dérivée seconde vaut $-1/x^2$: toutes les fonctions de cette famille sont strictement concaves. Au cas limite a = 1/e, la courbe touche l'axe au maximum. Le changement de signe n'est donc pas nécessaire à l'existence d'une racine. Cet exemple complète la méthode des valeurs intermédiaires en montrant une situation où une recherche fondée seulement sur des signes opposés manquerait la solution.

Pour une révision, reprenez le problème avec ln x + a x, a positif. La dérivée devient 1/x + a, toujours positive. Les limites vont de moins l'infini à plus l'infini, donc l'équation possède une unique solution. Un changement de signe dans l'expression modifie la structure du problème ; copier le tableau précédent sans recalculer serait une erreur.

B. Une suite définie par une fraction et un passage à la limite justifié

On définit $u_0 = 1$ et u_(n+1) = (2u_n + 3)/(u_n + 2). Avant de chercher une limite, on doit montrer que tous les termes existent et contrôler leur domaine. La fonction $\varphi(x) = (2x + 3)/(x + 2)$ est définie sur l'intervalle $[1,\sqrt{3}]$, car le dénominateur y est positif. Sa dérivée vaut $1/(x + 2)^2$, donc elle est croissante sur cet intervalle.

On a $\varphi(1) = 5/3$ et $\varphi(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. Comme $1 \leq 5/3 \leq \sqrt{3}$, la fonction envoie l'intervalle dans lui-même. Une récurrence prouve ainsi que tous les termes sont compris entre un et $\sqrt{3}$. Le calcul qui utilise la fonction est maintenant garanti à chaque étape.

La différence $\varphi(x) - x$ vaut $(3 - x^2)/(x + 2)$. Elle est positive ou nulle sur $[1,\sqrt{3}]$. Par conséquent u_(n+1) ≥ u_n : la suite est croissante et majorée. Elle converge donc vers une limite ℓ appartenant à cet intervalle. La continuité de φ permet seulement à ce stade d'écrire $\ell = \varphi(\ell)$.

L'équation de point fixe conduit à $\ell^2 = 3$. Les deux racines algébriques sont $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$, mais la limite appartient à $[1,\sqrt{3}]$. Elle vaut donc $\sqrt{3}$. Résoudre l'équation dès le début aurait fourni des candidats sans établir l'existence de la limite ni sélectionner le bon.

Les premiers termes sont $u_1 = 5/3$, $u_2 = 19/11$ et $u_3 = 71/41$, soit environ 1,6667, 1,7273 et 1,7317. Ils sont compatibles avec la preuve, mais ne la remplacent pas. Une série de valeurs apparemment stabilisées ne suffirait pas à justifier une convergence pour toutes les étapes suivantes.

Un approfondissement peut majorer la différence entre images par une constante inférieure à un sur l'intervalle. La dérivée y est au plus 1/9, ce qui suggère une contraction forte. Cette technique dépasse le besoin principal de l'exercice ; elle doit être présentée comme un complément. La solution de niveau Terminale repose déjà sur l'invariance, la monotonie, la majoration et la continuité.

C. Une optimisation avec contrainte géométrique

Une plaque rectangulaire fictive doit avoir une aire de 48 unités carrées. On cherche le rectangle de périmètre minimal parmi ceux dont les côtés sont strictement positifs. Si un côté vaut x, l'autre vaut 48/x, et le périmètre est $P(x) = 2x + 96/x$ pour x positif. Le domaine fait partie du modèle ; les valeurs nulles et négatives ne décrivent pas un rectangle admissible.

La dérivée vaut $2 - 96/x^2$. Elle s'annule pour $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Elle est négative avant cette valeur et positive ensuite. Le minimum global est donc atteint pour un carré, dont les deux côtés valent $4\sqrt{3}$ et le périmètre $16\sqrt{3}$. Les limites infinies aux deux extrémités du domaine sont cohérentes avec le résultat, mais le tableau de variations suffit déjà à établir le minimum.

Une démonstration sans dérivée utilise l'inégalité $x + 48/x \geq 2\sqrt{48}$ pour x positif, obtenue en développant un carré convenablement choisi. L'égalité exige $x = 48/x$. Les deux voies établissent le même résultat ; la seconde peut éclairer la symétrie du problème, tandis que la première s'adapte facilement à d'autres fonctions de coût.

Supposons maintenant qu'un côté doive être au moins dix. Le domaine devient $x \geq 10$. Comme dix est supérieur à $4\sqrt{3}$, la fonction y est croissante et le minimum contraint se trouve en $x = 10$, avec l'autre côté égal à 4,8. Le rectangle optimal n'est plus un carré. Une conclusion mémorisée sans tenir compte du domaine donnerait une réponse inadmissible.

Enfin, si les côtés représentent des dimensions réelles, l'épaisseur, les marges, le coût des matériaux et les contraintes de fabrication peuvent modifier l'objectif. Le problème mathématique est exact dans sa définition ; son application demande de vérifier que cette définition répond au besoin. Une optimisation ne choisit pas elle-même le bon critère.

D. Une probabilité de décision et ses hypothèses

Un système fictif accomplit une tâche lorsque deux composants indépendants fonctionnent, chacun avec probabilité 0,90. Si les deux sont indispensables, la probabilité de fonctionnement du système vaut 0,81. Si un seul suffit et que le modèle de secours est correctement représenté par l'événement « au moins un fonctionne », elle vaut $1 - 0{,}10^2 = 0{,}99$.

Ces résultats ne sont pas deux estimations concurrentes d'un même montage. Les événements de fonctionnement sont différents. La première configuration correspond à une intersection ; la seconde au complément de la panne des deux. Identifier le rôle des composants précède donc le calcul des probabilités.

L'indépendance est aussi une hypothèse importante. Si les composants dépendent d'une même alimentation qui peut tomber en panne, leurs états ne sont plus nécessairement indépendants. Un calcul qui conserve 0,99 sans prendre en compte cette cause commune peut surestimer la fiabilité. Le problème ne se corrige pas en modifiant arbitrairement les décimales ; il faut revoir le modèle.

Pour un protocole de dix essais indépendants de probabilité de succès 0,90, la probabilité de dix succès vaut $0{,}90^{10}$, environ 34,9 %. Une forte probabilité à chaque essai n'entraîne donc pas une certitude de réussite de toute la série. La probabilité d'au moins un échec vaut environ 65,1 %. Ces résultats ne contredisent pas le fait que l'espérance du nombre de succès soit neuf.

On peut expliquer cette distinction en comparant trois questions : réussite d'un essai, nombre moyen de réussites et réussite de tous les essais. Elles utilisent les mêmes paramètres, mais décrivent des événements ou des indicateurs différents. Une rédaction rigoureuse annonce laquelle elle traite et n'utilise pas un résultat pour répondre aux trois.

E. Géométrie et optimisation d'une distance

Dans un repère orthonormé, un point M = (2,−1,3) est fixé et une droite est décrite par H(t) = (t, t, 0). La distance au carré vaut D(t) = $(t-2)^2 + (t+1)^2 + 9 = 2t^2 - 2t + 14$. Étudier la dérivée donne D'(t) = 4t − 2, donc un minimum en t = 1/2.

Le point le plus proche est H = (1/2,1/2,0). La distance au carré vaut 13,5 et la distance √13,5. Le vecteur MH = (−3/2,3/2,−3) possède un produit scalaire nul avec le vecteur directeur (1,1,0). La méthode algébrique d'optimisation retrouve donc le projeté orthogonal, et la condition géométrique fournit un contrôle indépendant.

Si le problème concerne seulement le segment avec t entre un et deux, le point t = 1/2 n'est pas admissible. La fonction D est croissante sur ce segment ; le minimum y est atteint pour t = 1, au point (1,1,0). La distance au carré vaut quatorze. Une valeur minimale sur une droite ne répond pas automatiquement à la question sur un segment.

L'intérêt de travailler la distance au carré est que la racine carrée est croissante sur les nombres positifs : minimiser D revient à minimiser √D. On simplifie ainsi les calculs sans changer l'objectif. Cette justification doit être donnée plutôt que supposer que l'on peut retirer toute fonction extérieure d'un problème d'optimisation.

F. Démontrer une inégalité et reconnaître les cas d'égalité

Pour tout x positif, on veut établir x ln x − x + 1 ≥ 0. Définissons g(x) = x ln x − x + 1. Sa dérivée est ln x. Elle est négative sur]0,1[, nulle en un et positive sur]1,+∞[. La fonction admet donc un minimum global en un, et g(1) = 0. L'inégalité est démontrée ; l'égalité n'a lieu que pour x = 1.

La dérivée seconde vaut 1/x, positive. On peut aussi interpréter le résultat par la convexité de x ln x : sa tangente en un a pour équation y = x − 1, et la courbe reste au-dessus. Les deux preuves expriment des aspects du même raisonnement. La première utilise les variations, la seconde une propriété géométrique des fonctions convexes.

La condition x > 0 est indispensable à la définition du logarithme. On pourrait étudier une extension continue en zéro de x ln x, mais cette extension doit être construite et annoncée ; elle ne peut pas être utilisée silencieusement dans la démonstration initiale. Les domaines ne sont pas des précautions de présentation : ils déterminent où les objets existent.

Reconnaître le cas d'égalité est souvent essentiel dans une optimisation. Une borne inférieure sans condition d'atteinte ne suffit pas toujours à désigner une solution. Ici, la borne zéro est atteinte et l'unicité suit de la stricte variation de part et d'autre. Une bonne correction distingue les trois faits : la borne, son atteinte et l'unicité.

G. Préparer une résolution longue en plusieurs étapes

Pour un exercice de synthèse, commencez par écrire les dépendances : quelle question utilise quel résultat précédent ? Un calcul de limite peut permettre un signe, qui permet une existence de racine, qui permet ensuite un encadrement. Si une question intermédiaire est admise, on peut parfois l'utiliser pour poursuivre, en signalant clairement ce qui reste non démontré.

Conservez les valeurs exactes lorsque les étapes suivantes les utilisent. Un arrondi trop précoce peut déplacer un seuil entier ou transformer une différence très petite. Présentez l'approximation à la fin, avec un symbole adapté. Lorsque plusieurs solutions algébriques apparaissent, revenez au domaine et aux conditions du problème pour décider lesquelles sont admissibles.

Si vous utilisez un outil de calcul, notez ce qu'il a effectivement fait : évaluation, tracé, résolution approchée ou simulation. Un graphique qui semble montrer une unique intersection n'est pas une preuve d'unicité. Une liste de dix termes n'est pas une preuve de convergence. L'outil peut guider le choix d'une démonstration et contrôler un résultat ; il ne transforme pas une observation en proposition générale.

H. Réviser avec des erreurs expliquées

Construisez un carnet court d'erreurs classées : domaine oublié, implication inversée, hypothèse manquante, condition de boucle, mauvaise traduction d'un événement, confusion de point et de vecteur, arrondi précoce. Pour chaque erreur, écrivez un exemple fautif et sa correction justifiée. Le but est de reconnaître la structure de l'erreur dans un autre exercice, pas de mémoriser seulement une réponse.

Alternez des problèmes où une technique familière fonctionne et des problèmes où elle serait inadaptée. Pour une loi binomiale, comparez tirage avec remise et sans remise. Pour une optimisation, comparez un domaine ouvert et un domaine contraint. Pour une intégrale, comparez aire géométrique et accumulation signée. Cette alternance apprend à choisir au lieu d'appliquer automatiquement.

Une évaluation personnelle utile consiste à refaire un exercice quelques jours après sa lecture, puis à expliquer pourquoi une autre méthode possible est plus longue ou insuffisante. Vous vérifiez ainsi la reconstruction du raisonnement. Une impression de fluidité pendant la lecture peut provenir de la correction déjà présente, et ne doit pas être confondue avec une maîtrise autonome.

Le guide offre des exemples et des méthodes, pas une promesse de résultat scolaire. Une réponse correcte doit aussi être claire, pertinente et cohérente : annoncez ce que vous démontrez, vérifiez que vos hypothèses correspondent à l'énoncé et concluez avec la portée exacte du résultat. Cette exigence demeure utile même lorsque les calculs sont déjà justes.