

ORCHESTRATEUR

Matemáticas - Guía completa de estudio y repaso

Una guía completa, disponible sin conexión

Leer, comprender y encontrar un capítulo

LAFAYETTE DIGITAL PRODUCTS

Índice

Las entradas del índice son enlaces. Los marcadores del PDF permiten acceder a capítulos y secciones. El enlace al pie de cada página vuelve aquí.

Capítulo 1 - Del problema a la prueba: dominio, implicación y contraejemplo 9

Capítulo 2 - Sucesiones e inducción: comprender una evolución discreta 19

Capítulo 3 - Límites: establecer un comportamiento sin confundir cálculo y demostración 28

Capítulo 4 - Continuidad: demostrar existencia, unicidad y acotación 38

Capítulo 5 - Derivación y optimización: pasar de una variación local a una conclusión 48

Capítulo 6 - Convexidad: comparar una curva, sus cuerdas y sus tangentes 57

Capítulo 7 - Exponencial, logaritmo y trigonometría: transformar sin perder el dominio 67

Capítulo 8 - Primitivas e integrales: medir una acumulación y controlar una aproximación 76

Capítulo 9 - Ecuaciones diferenciales: relacionar una evolución con su velocidad de cambio 85

Capítulo 10 - Recuento, probabilidades y distribución binomial 94

Capítulo 11 - Geometría en el espacio: vectores, planos y distancias 106

Capítulo 12 - Estadística, concentración y procedimientos algorítmicos 117

Anexos - Problemas largos, soluciones y estrategias de repaso 129

Matemáticas - Guía completa de estudio y repaso

Edición española íntegra del texto francés LFDP revisado. La referencia educativa es Terminale general, el último curso de secundaria en Francia; no se presenta como un programa oficial de examen español.

Preparación editorial y traducción asistidas por Codex (OpenAI), bajo la dirección de Lafayette Digital Products. La traducción conserva definiciones, argumentos, ilustraciones históricas, ejercicios y soluciones; su relectura independiente en español está pendiente. Esta contribución no constituye una certificación académica ni una garantía de resultados.

Índice de lectura

- Matemáticas - Definir, demostrar, calcular e interpretar - Capítulo 1 - Del problema a la prueba: dominio, implicación y contraejemplo - Capítulo 2 - Sucesiones e inducción: comprender una evolución discreta - Capítulo 3 - Límites: establecer un comportamiento sin confundir cálculo y demostración - Capítulo 4 - Continuidad: demostrar existencia, unicidad y acotación - Capítulo 5 - Derivación y optimización: pasar de una variación local a una conclusión - Capítulo 6 - Convexidad: comparar una curva, sus cuerdas y sus tangentes - Capítulo 7 - Exponencial, logaritmo y trigonometría: transformar sin perder el dominio - Capítulo 8 - Primitivas e integrales: medir una acumulación y controlar una aproximación - Capítulo 9 - Ecuaciones diferenciales: relacionar una evolución con su velocidad de cambio - Capítulo 10 - Recuento, probabilidades y distribución binomial - Capítulo 11 - Geometría en el espacio: vectores, planos y distancias - Capítulo 12 - Estadística, concentración y procedimientos algorítmicos - Anexos - Problemas largos, soluciones y estrategias de repaso

Matemáticas - Definir, demostrar, calcular e interpretar

Una progresión del nivel de Terminale

Esta guía desarrolla las principales herramientas matemáticas de la especialidad de Terminale general, el último curso de secundaria en Francia, con los recordatorios del curso anterior necesarios para comprenderlas. Organiza definiciones, demostraciones, métodos y ejercicios originales. El programa institucional delimita el ámbito de estudio; no se reproduce su texto ni se garantiza la cobertura de todas las modalidades de una futura convocatoria de examen. Los contenidos de ampliación se identifican cuando superan el núcleo del recorrido.

El objetivo no es acumular fórmulas, sino reconocer las condiciones que permiten utilizarlas. Una derivada correctamente calculada no resuelve por sí sola un problema de optimización. Una distribución binomial no se adapta a cualquier repetición de extracciones. Una figura en el espacio no demuestra una intersección. Por eso, cada tema relaciona el significado de los objetos con un procedimiento cuyos pasos pueden justificarse.

Las situaciones numéricas son didácticas y ficticias cuando no describen simplemente un objeto matemático. No se garantiza ninguna rentabilidad financiera, resultado médico o comportamiento real de un producto. Las aplicaciones sirven para comprender un razonamiento y sus límites. No sustituyen el análisis profesional de una decisión delicada.

Cómo utilizar los doce capítulos

El primer capítulo presenta el lenguaje y los razonamientos. Los dos siguientes desarrollan las sucesiones y los límites. La continuidad, la derivación y la convexidad forman después un conjunto coherente para estudiar las funciones. El séptimo capítulo reúne la exponencial, el logaritmo y la trigonometría; el octavo trata las integrales; el noveno, las ecuaciones diferenciales. Las probabilidades, la geometría del espacio y la estadística junto con la algoritmia completan el recorrido.

En una primera lectura, siga este orden y vuelva a resolver los ejemplos sencillos. Para repasar, elija una pregunta precisa y localice la propiedad de la que depende su respuesta. Los anexos proponen problemas transversales que exigen varias herramientas. No se limitan a repetir los cálculos de los capítulos: muestran cómo organizar una resolución más larga y analizar lo que cambia al modificar las hipótesis.

Trabaje con una hoja o un soporte para notas, aunque consulte la guía en el teléfono. Lea el enunciado, oculte la solución y redacte al menos un intento. Un error explicado suele enseñar más que una solución comprendida inmediatamente. Anote el primer paso en el que su razonamiento dejó de estar justificado, no solo el último resultado diferente.

Escritura, exactitud y aproximación

Los símbolos se definen en su contexto. Una igualdad exacta y una aproximación numérica no desempeñan el mismo papel: conservar una expresión como $\ln 2$ o $\sqrt{3}$ puede evitar errores de redondeo. Un intervalo, una condición sobre el dominio o un índice inicial forman parte del resultado. Eliminar esta información puede convertir una respuesta exacta en una afirmación falsa.

Una demostración establece una proposición para todos los valores indicados. Un ejemplo solo comprueba un caso; en cambio, un contraejemplo basta para refutar una afirmación universal. Una simulación explora un modelo, pero no sustituye una prueba. Estas distinciones atraviesan toda la guía y constituyen una competencia tan importante como el dominio técnico.

Para comprobar una solución, busque un método independiente: una derivada para verificar una primitiva, una sustitución para verificar una ecuación diferencial, una probabilidad complementaria para comprobar un suceso o una ecuación de plano para verificar un punto calculado. La comprobación no debe ser una simple repetición de la operación que pudo producir el error.

La longitud de un desarrollo no garantiza ni el dominio de la materia ni una calificación escolar. Para utilizar esta guía, elija una noción, reconstruya su razonamiento sin mirar la solución y verifique después las hipótesis y los cálculos. El objetivo es poder transferir un método a un problema nuevo, no haber recorrido simplemente más páginas.

Capítulo 1 - Del problema a la prueba: dominio, implicación y contraejemplo

Objetivos: identificar la naturaleza del resultado buscado, distinguir comprobación y prueba, explicitar los dominios y las transformaciones. El módulo inicial se integra aquí una sola vez como recorrido de fundamentos; los capítulos siguientes profundizan en cada familia de problemas.

Referencia histórica - Hilbert: hacer visibles las hipótesis

En 1899, David Hilbert publica Grundlagen der Geometrie, una presentación axiomática de la geometría. Esta referencia recuerda que una figura conocida no exime de precisar las relaciones admitidas y las propiedades demostradas. En este capítulo, la misma exigencia se aplica al dominio de una variable y a las condiciones de una transformación: una conclusión solo es válida bajo las hipótesis efectivamente utilizadas. La comparación es didáctica; la guía no expone el sistema de axiomas de Hilbert ni pretende resolver las cuestiones de fundamentos.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/

1. Saber qué se busca establecer

Un cálculo puede producir un valor, una conjetura o una demostración: estos resultados no tienen el mismo estatuto. Comprobar una relación para cinco valores sugiere que podría ser verdadera; no la demuestra para todos los números. Una demostración explica por qué la conclusión se deduce de las hipótesis en todo el dominio indicado. En cambio, un solo contraejemplo basta para refutar una afirmación universal.

Consideremos «para todo real x, $x^2 > x$». Los valores 2 y 3 satisfacen esta desigualdad, pero $x = 0$ ya la refuta. El real 1/2 incluso proporciona $x^2 < x$. El fallo no procede de una falta de cálculos: la proposición era demasiado amplia. Para buscar un enunciado correcto, factoricemos $x^2 - x = x(x - 1)$ y estudiemos después el signo según los intervalos. Se obtiene $x^2 > x$ cuando $x < 0$ o $x > 1$.

Antes de resolver, precise el dominio, los datos y el tipo de respuesta: valor exacto, aproximación, existencia, unicidad o propiedad válida para todo índice. Estas distinciones orientan el método y evitan presentar una aproximación gráfica como una prueba.

2. Implicación, equivalencia y dominio de definición

Dos proposiciones son equivalentes cuando cada una implica la otra. Elevar una igualdad al cuadrado puede conservar una implicación sin conservar la equivalencia. La igualdad $x = 2$ implica $x^2 = 4$; la ecuación $x^2 = 4$ admite también $x = -2$. En una cadena de resolución, indicar las condiciones que hacen reversibles las transformaciones permite detectar las soluciones adicionales.

Dividir por una expresión exige que no sea nula. Para resolver $x(x - 2) = 0$, dividir de entrada por x elimina la solución $x = 0$. La propiedad del producto nulo da directamente $x = 0$ o $x = 2$. Del mismo modo, una expresión que contiene $\ln(x)$ exige $x > 0$. El dominio no es una precaución añadida después del cálculo: forma parte del problema desde el principio.

Una buena costumbre consiste en destacar las restricciones al inicio y comprobar después las soluciones obtenidas en la ecuación original. Esta última comprobación no sustituye la prueba de que se han encontrado todas las soluciones, pero elimina las introducidas por una transformación no reversible.

3. Una sucesión: describir una evolución discreta

Una sucesión asocia un valor u_n a cada índice entero de su dominio. Una expresión explícita da directamente u_n en función de n; una relación de recurrencia calcula un valor a partir de los anteriores. Ambas descripciones pueden representar la misma evolución, pero facilitan preguntas diferentes.

Tomemos u_0 = 1 y u_(n+1) = 0,5 u_n + 2. Los primeros términos son 1; 2,5; 3,25; 3,625. Sugieren un crecimiento hacia 4 sin demostrarlo. Busquemos un valor fijo L que satisfaga L = 0,5 L + 2: se obtiene L = 4. Definamos v_n = u_n − 4. Entonces v_(n+1) = 0,5 v_n, por lo que v_n = −3 × (0,5)^n y u_n = 4 − 3 × (0,5)^n.

Esta expresión permite justificar las observaciones. Como (0,5)^n es estrictamente positivo, u_n < 4. Además, u_(n+1) − u_n = 1,5 × (0,5)^n > 0: la sucesión es creciente. Por último, (0,5)^n tiende a cero, de modo que u_n tiende a 4. Un cálculo de valores se ha convertido en una prueba gracias a la identificación de una estructura.

4. La inducción: no olvidar el primer eslabón

Una demostración por inducción consta de un caso inicial, un paso inductivo y una conclusión. Para demostrar u_n < 4 en el ejemplo anterior, se empieza por u_0 = 1 < 4. Si u_n < 4, entonces u_(n+1) = 0,5 u_n + 2 < 0,5 × 4 + 2 = 4. Por tanto, la propiedad se cumple para todos los enteros n ≥ 0.

Se utiliza el signo positivo de 0,5: multiplicar una desigualdad por un número negativo invertiría su sentido. Escribir únicamente «supongamos que la propiedad es verdadera» y volver a obtener una frase parecida no constituye un paso inductivo. Hay que mostrar exactamente cómo la hipótesis sobre n produce la conclusión sobre n + 1.

La inducción no es una explicación circular. El caso inicial establece un caso sin suponer la conclusión general; el paso inductivo describe una transición válida a partir de cualquier caso ya establecido. Eliminar uno de estos dos elementos destruye el argumento.

5. Derivar para comprender una variación

El cociente [f(x + h) − f(x)] / h describe una variación media cuando h no es nulo. Si su límite existe cuando h tiende a cero, define f'(x). Geométricamente, la derivada da la pendiente de la tangente; en un modelo de posición, puede representar una velocidad. Las unidades de la derivada son las de f divididas por las de x.

En un intervalo, el signo de la derivada informa sobre la monotonía bajo las hipótesis habituales de derivabilidad. Sin embargo, buscar los ceros de f' no basta para determinar un máximo global. Hay que examinar el signo, el dominio y, según el problema, los extremos del intervalo. Un punto en el que f' se anula también puede ser un mínimo o no corresponder a ningún extremo.

Para una función compuesta g(u(x)), la derivada es g'(u(x)) × u'(x). Por tanto, la derivada de e^(−2x) es −2 e^(−2x), y no simplemente e^(−2x). El factor asociado a la función interior es a menudo la parte olvidada. Aquí ayuda comprobar la forma esperada: un decrecimiento exponencial debe tener una derivada negativa.

6. Optimizar bajo una restricción

Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m. Si sus lados miden x e y, se cumple $x + y = 10$. Su área no es, por tanto, una función de dos variables independientes: $A(x) = x(10 - x)$, con $0 \leq x \leq 10$ si se incluyen los casos límite degenerados para el estudio matemático.

La derivada $A'(x) = 10 - 2x$ es positiva antes de 5 y negativa después de 5. El área máxima es $A(5) = 25$ m²; el rectángulo correspondiente es un cuadrado. Otra prueba se obtiene de $A(x) = 25 - (x - 5)^2$. Ambos enfoques son compatibles: uno utiliza la monotonía y el otro una propiedad algebraica. Comparar métodos pertinentes enriquece el razonamiento sin crear un desacuerdo artificial.

Queda interpretar la respuesta. Si una restricción adicional impusiera una anchura inferior a 3 m, el máximo anterior dejaría de ser admisible. Resolver el problema ideal y olvidar después las restricciones reales equivaldría a responder a otra pregunta.

7. Existencia y unicidad son dos resultados distintos

Consideremos $f(x) = x^3 + x - 1$. Es continua en $[0; 1]$, con $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$. El teorema del valor intermedio garantiza, por tanto, al menos una solución de $f(x) = 0$ en este intervalo. Como $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, la función es estrictamente creciente: esta solución es única.

La continuidad permite establecer la existencia; la monotonía estricta permite obtener la unicidad. No deben confundirse estas dos propiedades. Una función continua puede alcanzar varias veces un mismo valor. Una función estrictamente creciente puede no alcanzar el valor buscado en un intervalo dado.

La bisección proporciona después una acotación. Aquí f(0,5) = −0,375 y f(0,75) = 0,171875: la solución pertenece a [0,5; 0,75]. Cada paso conserva un cambio de signo y divide por dos la longitud del intervalo. Una acotación acompañada del método informa más que un número con muchas cifras decimales sin justificar.

8. Logaritmos e interpretación de un umbral

La exponencial y el logaritmo natural son funciones inversas en sus dominios correspondientes. Para resolver e^(−2t) = 0,1, se toma el logaritmo de cantidades positivas: −2t = ln(0,1) = −ln(10), de donde t = ln(10)/2, aproximadamente 1,1513 en la unidad de tiempo del modelo.

La solución de una ecuación no siempre coincide con el resultado de un umbral expresado mediante una desigualdad. Si se pide e^(−2t) ≤ 0,1 para t ≥ 0, la respuesta es t ≥ ln(10)/2, porque la exponencial considerada es decreciente. La expresión ln(a + b) = ln(a) + ln(b) es falsa en general: el logaritmo transforma un producto de factores positivos en una suma, no una suma en una suma.

En nuestra sucesión, pedir 4 − u_n < 0,01 conduce a 3 × (0,5)^n < 0,01. El primer índice admisible es n = 9: la diferencia para n = 8 es 0,01171875 y para n = 9 es 0,005859375. Como el índice es entero, un valor real obtenido mediante un logaritmo debe interpretarse todavía correctamente.

9. Ejercicios resueltos

A - Contraejemplo. «Si a² = b², entonces a = b». **Solución:** a = 1 y b = −1 refutan el enunciado. La conclusión correcta sobre los reales es a = b o a = −b, obtenida al factorizar a² − b².

B - Monotonía. Estudie $f(x) = x^3$ sobre los reales. **Solución:** $f'(x) = 3x^2 \geq 0$; la función es estrictamente creciente, pese a que $f'(0) = 0$. También se pueden comparar directamente dos cubos. La anulación puntual de la derivada no impone un extremo.

C - Primitiva. Encuentre una primitiva de $2x$ sobre los reales y después la integral de $2x$ entre 0 y 3. **Solución:** $F(x) = x^2$ sirve, ya que $F' = 2x$. La integral es $F(3) - F(0) = 9$. Añadir una constante a F no cambia esta diferencia.

D - Definición. Calcule la mediana de 2; 3; 8; 11. **Solución:** la lista está ordenada y contiene cuatro valores; la mediana habitual es la media de los dos valores centrales, $(3 + 8)/2 = 5{,}5$. La media aritmética de la serie es 6: los dos indicadores no responden exactamente a la misma pregunta.

10. Repasar un procedimiento, no solo un resultado

Para cada ejercicio, pregúntese: ¿qué dominio, qué propiedad, qué hipótesis, qué transformación y qué conclusión? Repetir el cálculo con otros valores permite comprobar que el método no depende de un ejemplo aprendido de memoria. Explicar oralmente por qué un paso está permitido suele revelar una comprensión todavía frágil.

Una solución legible distingue los datos, el razonamiento y la interpretación. Conectores como «puesto que», «por tanto» y «recíprocamente» deben corresponder a un vínculo lógico real. Conserve un cuaderno de errores que contenga una corrección y un contraejemplo; una simple lista de fórmulas no muestra cuándo emplearlas.

11. Cuantificadores: decir exactamente qué afirma la prueba

«Para todo x, existe y» y «existe y tal que para todo x» no dicen lo mismo. Si cada alumno puede encontrar un libro que le convenga, el libro puede variar según el alumno. Esto no establece la existencia de un mismo libro adecuado para todos. En matemáticas, la diferencia aparece en las propiedades de funciones: para todo real x, existe un real y tal que $y > x$; no existe un real y mayor que todos los reales x. El primer enunciado se demuestra eligiendo $y = x + 1$; el segundo se refuta tomando $x = y + 1$, cualquiera que sea el candidato propuesto.

Para negar «todos los términos son positivos», basta afirmar que al menos un término no lo es. La negación de $u_n > 0$ es $u_n \leq 0$, y no $u_n < 0$. Una igualdad puede ser el contraejemplo que faltaba. A la inversa, negar «existe una solución» significa que ningún valor del dominio satisface la ecuación. Esta última afirmación exige una prueba que cubra todo el dominio; no haber encontrado una solución en una calculadora no es una prueba de este tipo.

En una redacción, anuncie el objeto arbitrario: «sea x un real estrictamente positivo». Esta elección no impone ningún valor particular y permite demostrar una propiedad general dentro del dominio. Cuando una constante dependa de x, indíquelo. Los cuantificadores impiden así transformar una construcción adaptada a un caso en una promesa uniforme. Esta precisión resulta útil para los umbrales de convergencia, las probabilidades y los problemas de optimización.

12. Elegir entre prueba directa, contraposición y contradicción

Una prueba directa parte de las hipótesis y obtiene la conclusión. Para demostrar que $x > 1$ implica $x^2 > x$, se escribe $x^2 - x = x(x - 1)$ y se observa después que ambos factores son positivos. La contraposición expresa la misma relación en otro sentido: si $x^2 \leq x$, entonces $x \leq 1$. Hay que conservar la negación exacta y el dominio. La recíproca «si $x^2 > x$, entonces $x > 1$» es falsa, porque $x = -1$ satisface la hipótesis sin satisfacer la conclusión.

El razonamiento por contradicción supone temporalmente la negación de la conclusión y busca una incompatibilidad con las hipótesis o con una propiedad ya establecida. No basta obtener una frase sorprendente. Por ejemplo, para demostrar que no existe un número natural mayor que todos los demás, supongamos que existe uno, N. El entero $N + 1$ también pertenece a los naturales y es mayor que él: esta es la contradicción buscada. Además, el razonamiento proporciona una explicación, porque sabemos construir un candidato contrario a cualquier supuesto máximo.

Una solución puede emplear varios métodos, pero cada transición debe poder identificarse. Empezar por «supongamos que la propiedad es verdadera» sin precisar si se prepara una inducción, una contraposición o una contradicción obliga al lector a adivinar el papel de la hipótesis. Una prueba lograda expone ese papel, en lugar de presentar una sucesión de cálculos ya conocidos por su autor.

Ejercicio complementario. Para reales a y b, se afirma: «si $ab = 0$, entonces $a = 0$». Encuentre una corrección precisa. **Solución:** $a = 2$ y $b = 0$ constituyen un contraejemplo. La conclusión válida es $a = 0$ o $b = 0$. Si se añade $b \neq 0$ a las hipótesis, la conclusión $a = 0$ pasa a ser correcta mediante una división. La propiedad no era completamente absurda; había perdido una hipótesis o una

alternativa indispensable. Aprender a reparar un enunciado desarrolla la comprensión más que limitarse a clasificar una frase como verdadera o falsa.

Capítulo 2 - Sucesiones e inducción: comprender una evolución discreta

Referencia histórica - Fibonacci: una recurrencia nace de unas hipótesis

El Liber abaci de Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, data de 1202 y contiene un problema ficticio de reproducción de conejos asociado a la sucesión que hoy lleva su nombre. Para nuestro capítulo, lo interesante es el paso de unas hipótesis a una regla de recurrencia y el examen posterior de lo que esta regla permite concluir. Un modelo así no se convierte en una predicción biológica por el mero hecho de que sus primeros términos sean fáciles de calcular. Este hito no significa ni que Fibonacci inventara todas las sucesiones de esta forma ni que todos los fenómenos naturales sigan esta recurrencia.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/

1. Identificar el índice y la regla de evolución

Una sucesión es una función definida sobre un conjunto de enteros, a menudo los números naturales. El índice n no es el valor u_n: identifica una etapa. Cuando u_n describe una cantidad después de n operaciones, u_0 describe el estado anterior a la primera operación. Un error en el punto de partida desplaza toda la interpretación sin que los cálculos tengan necesariamente un aspecto incorrecto. Empiece, por tanto, con una frase que explique el índice y la condición inicial.

Una definición explícita, como u_n = 3n + 2, permite calcular directamente el término de índice 100. Una definición por recurrencia, como u_(n+1) = 0,8u_n + 5, requiere un valor inicial y

construye la evolución paso a paso. La segunda escritura no permite sustituir u_n por n: u_(n+1) = 0,8n + 5 sería otra sucesión. La regla actúa sobre el valor presente, no directamente sobre el número de la etapa.

Una tabla de los primeros términos y una representación gráfica pueden sugerir un comportamiento. Ayudan a detectar un signo o una posible cota, pero no constituyen una prueba para una cantidad infinita de términos. Una calculadora también puede ocultar una divergencia lenta o una oscilación muy pequeña mediante sus redondeos. Las observaciones orientan, por tanto, la búsqueda; los argumentos algebraicos y los teoremas establecen el resultado.

2. Sucesiones aritméticas: una adición constante

Una sucesión aritmética satisface u_(n+1) = u_n + r, donde r es una constante llamada diferencia. Para un primer término u_0, su expresión explícita es u_n = u_0 + nr. Puede demostrarse por inducción: el caso n = 0 es inmediato; si la fórmula es válida para el índice n, entonces u_(n+1) = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r. Así se transmite la propiedad al término siguiente.

El signo de r determina la monotonía: una diferencia positiva produce un crecimiento estricto; una negativa, un decrecimiento estricto; una nula, una sucesión constante. Un aumento constante de 5 unidades es distinto de un aumento del 5 %. En el primer caso, se suma 5; en el segundo, se multiplica por 1,05. Hay que comprender esta distinción antes de buscar una fórmula, sobre todo cuando el lenguaje cotidiano emplea en ambos casos «aumento regular».

La suma de N términos consecutivos de una sucesión aritmética es N veces la media del primer término y del último. Para los términos de u_0 a u_n, ambos incluidos, hay n + 1 términos; la suma es (n +

1)(u_0 + u_n)/2. Una demostración consiste en escribir la suma en orden directo y después inverso: cada pareja de términos correspondientes tiene la misma suma u_0 + u_n. Esta prueba explica el factor 1/2 y evita confundir el último índice con el número de términos.

Ejemplo ficticio: una serie de longitudes es 4; 7; 10; ...; 34. La diferencia es 3. Se resuelve 4 + 3n = 34, por lo que n = 10 y hay once términos, no diez. La suma es 11×(4 + 34)/2 = 209. Comprobar los casos pequeños resulta útil: para n = 0, la fórmula debe devolver u_0, y no cero.

3. Sucesiones geométricas: un factor constante

Una sucesión geométrica satisface u_(n+1) = qu_n. Si empieza en el índice cero y q ≠ 0, su expresión explícita es u_n = u_0q^n para n ≥ 0. Cuando q = 0, se conserva el término inicial dado, u_0, y después u_n = 0 para todo n ≥ 1; esta escritura separada evita introducir 0^0. El factor q puede ser positivo, nulo o negativo; su valor y el signo de u_0 deben examinarse antes de anunciar la monotonía. Para u_0 > 0 y q > 1, la sucesión es creciente. Para u_0 > 0 y 0 < q < 1, es decreciente hacia cero. Un factor negativo provoca una alternancia de signo cuando u_0 no es nulo.

Una disminución del 20 % en cada etapa corresponde a q = 0,80. Después de dos etapas, el valor se multiplica por $0{,}80^2 = 0{,}64$: la disminución total es del 36 %, no del 40 %. Los porcentajes sucesivos se aplican a bases diferentes. Una cantidad ficticia inicial de 60 unidades pasa a ser 48 y después 38,4. El ejemplo es un ejercicio de cálculo, no una predicción de una evolución económica, biológica o médica.

Para q distinto de 1, la suma 1 + q + ... + q^n es (1 − q^(n+1))/(1 − q). Para establecerlo, multiplique la suma S por q y reste después: S − qS = 1 − q^(n+1). La división está permitida porque

q ≠ 1. Para q = 1, la suma es simplemente n + 1. Separar este caso no es una formalidad: la fórmula anterior tendría un denominador nulo.

Por tanto, la suma de los términos de u_0 a u_n es u_0(1 − q^(n+1))/(1 − q). Para u_0 = 2 y q = 1/2, los cuatro primeros términos dan 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = 3,75. La fórmula da 2(1 − (1/2)^4)/(1/2) = 3,75. Esta comprobación confirma tanto el número de términos como el exponente n + 1.

4. Inducción: formular una propiedad que pueda transmitirse

Una prueba por inducción se refiere a una proposición P(n) para cada entero de un dominio. Consta de un caso inicial, un paso inductivo y una conclusión. En el paso inductivo, se fija un entero n arbitrario del dominio, se supone P(n) y se demuestra P(n + 1). No se supone simultáneamente la conclusión para todos los índices. La función de la hipótesis es local y condicional.

En ocasiones conviene reforzar la forma de P(n). Para demostrar únicamente u_n < 5, puede resultar más útil demostrar 0 ≤ u_n < 5, porque una cota inferior permite aplicar después una raíz o conservar un signo. Reforzar una hipótesis de inducción no consiste en añadir arbitrariamente lo que facilita el cálculo: hay que demostrar todos sus componentes al inicio y en el paso al índice siguiente.

Veamos una prueba original de una identidad: para todo n ≥ 0, 1 + 3 + … + (2n + 1) = (n + 1)². En el índice cero, el miembro izquierdo vale 1 y el derecho también. Supongamos la identidad para el índice n. Para el índice n + 1, se añade el término 2n + 3: (n + 1)² + 2n + 3 = n² + 4n + 4 = (n + 2)². Se transmite la igualdad. Una representación de cuadrados encajados puede ilustrar este crecimiento, pero la demostración algebraica abarca todos los índices.

Los errores frecuentes son un caso inicial en el índice equivocado, un cálculo que nunca utiliza la hipótesis y una conclusión sin dominio. Una propiedad como 2^n ≥ n puede tener pruebas breves; eso no justifica suprimir sus pasos. La redacción puede ser concisa y, a la vez, completa: a menudo basta con identificar el caso inicial y mostrar explícitamente la transición.

5. Estudiar la monotonía sin un método automático

Para comparar dos términos consecutivos, puede estudiarse u_(n+1) − u_n. Una diferencia positiva para todo índice establece un crecimiento. Si todos los términos son estrictamente positivos, también puede estudiarse el cociente u_(n+1)/u_n y compararlo con 1. La positividad es indispensable para esta segunda estrategia; un cociente negativo o un término nulo exigen otro análisis.

Una función asociada también puede ayudar. Para u_n = f(n), si f es creciente en un intervalo que contiene los índices estudiados, la sucesión es creciente. La recíproca no es una regla general: una función puede variar entre los enteros sin impedir que sus valores en los enteros sean crecientes. No sustituya, por tanto, una sucesión por una función afirmando una equivalencia sin justificarla.

Consideremos u_n = n/(n + 1), para n ≥ 0. La diferencia es (n + 1)/(n + 2) − n/(n + 1) = 1/[(n + 1)(n + 2)] > 0. La sucesión es creciente y permanece estrictamente por debajo de 1. La expresión u_n = 1 − 1/(n + 1) ofrece un segundo enfoque inmediato. Ambos métodos muestran estructuras diferentes: una comparación local entre términos vecinos y una distancia explícita al límite.

6. Recurrencia afín: desplazar el origen de los valores

Para u_(n+1) = au_n + b, con a ≠ 1, el valor fijo L resuelve L = aL + b, de donde L = b/(1 − a). Definir v_n = u_n − L transforma la relación en v_(n+1) = av_n. Así, u_n = L + (u_0 − L)a^n. La nueva variable mide la diferencia respecto del punto fijo; hace visible la estructura geométrica.

Tomemos u_0 = 10 y u_(n+1) = 0,75u_n + 3. El punto fijo es 12 y u_n = 12 − 2(0,75)^n. La sucesión es creciente, permanece por debajo de 12 y converge a 12. Si se eligiera u_0 = 14 con la misma regla, se obtendría 12 + 2(0,75)^n: un decrecimiento hacia el mismo límite. Por tanto, la regla por sí sola no siempre impone el sentido de la monotonía; la condición inicial también lo determina.

Con a = −1/2 y L = 4, la diferencia alterna de signo y su valor absoluto disminuye. La sucesión puede converger sin ser monótona. Con a = 2, una diferencia inicial no nula se multiplica por dos en cada etapa y se aleja del punto fijo. Sin embargo, si u_0 = L, la sucesión es constante. Decir «a > 1 implica siempre divergencia» olvidaría este caso excepcional. El capítulo sobre los límites precisará estas distinciones.

7. Una sucesión definida mediante una raíz

Estudiemos u_0 = 0 y u_(n+1) = sqrt(u_n + 2). Primero hay que garantizar que todos los términos estén definidos. Demostremos por inducción 0 ≤ u_n ≤ 2. Esta propiedad se cumple al inicio. Si se cumple para el índice n, entonces 2 ≤ u_n + 2 ≤ 4, de modo que sqrt(2) ≤ u_(n+1) ≤ 2. La expresión sigue estando definida y el término siguiente respeta la cota anunciada.

La función f(x) = sqrt(x + 2) es creciente en [0; 2]. Como u_1 = sqrt(2) > u_0, una inducción da u_(n+1) ≥ u_n: si u_n ≥ u_(n−1), aplicar f conserva la desigualdad. También puede compararse f(x) con x para 0 ≤ x ≤ 2. Las dos cantidades son positivas o nulas; por

tanto, f(x) ≥ x equivale a x + 2 ≥ x², es decir, (x − 2)(x + 1) ≤ 0, propiedad verdadera en ese intervalo.

La sucesión es creciente y está acotada superiormente: el teorema de convergencia monótona asegura que tiene un límite finito. Utilizando la continuidad de la raíz, este límite L satisface L = sqrt(L + 2). Como L pertenece a [0; 2], se puede elevar al cuadrado y obtener L² − L − 2 = 0. Los candidatos son 2 y −1; solo 2 pertenece al dominio. La ecuación del punto fijo no bastaba para demostrar la convergencia y su dominio elimina una solución algebraica extraña.

8. Umbrales, números enteros y algoritmos

Para la cantidad ficticia u_n = 60(0,80)^n, busquemos el primer índice para el que u_n < 5. Se obtiene (0,80)^n < 1/12. El logaritmo es creciente en los positivos, por lo que n ln(0,80) < ln(1/12). Dividir por ln(0,80), que es negativo, invierte la desigualdad: n > ln(1/12)/ln(0,80), aproximadamente 11,136. El primer entero admisible es 12.

La comprobación final establece que es el menor: u_11 vale aproximadamente 5,154, por lo que no cumple el umbral estricto; u_12 vale aproximadamente 4,123, por lo que sí lo cumple. Redondear n al entero más cercano sería aquí un método incorrecto. La pregunta pide un entero que satisfaga una desigualdad, no una aproximación simétrica de un número real.

Un algoritmo puede proceder sin logaritmos: inicializar n = 0 y u = 60; después, mientras u ≥ 5, sustituir u por 0,80u y n por n + 1. El estado u = 60(0,80)^n es un invariante del bucle. La convergencia a cero asegura aquí que el umbral acabará alcanzándose. Para otra sucesión, un bucle similar podría no detenerse nunca; por eso hay que analizar su terminación, no solo su sintaxis.

9. Ejercicios resueltos

A - Desplazamiento. Una sucesión aritmética empieza por u_1 = 7 y tiene diferencia 4. **Solución:** u_n = 7 + 4(n − 1), para n ≥ 1. El término u_6 vale 27. Escribir 7 + 4n contaría un aumento adicional. La suma de los seis primeros términos es 6(7 + 27)/2 = 102.

B - Cociente. ¿Es decreciente la sucesión u_n = (−1/2)^n? **Solución:** no; sus términos alternan alrededor de cero. Su valor absoluto (1/2)^n decrece y tiende a cero. El cociente de los términos es −1/2 y no permite aplicar el criterio basado en la comparación con 1 para términos positivos.

C - Fórmula afín. u_0 = 3 y u_(n+1) = 2u_n − 1. **Solución:** L = 1 y después u_n = 1 + 2×2^n. El primer término obtenido es efectivamente 3; el siguiente vale 5. La sucesión diverge a +∞. Una solución de L = 2L − 1 no es automáticamente el límite de todas las sucesiones definidas por esta regla.

D - Cota insuficiente. «Una sucesión acotada superiormente converge». **Solución:** (−1)^n está acotada superiormente, pero no converge. Sus dos subsucesiones de índices pares e impares tienen límites distintos, lo que hace imposible un límite común. Una hipótesis suficiente sería que la sucesión fuera creciente y estuviera acotada superiormente: el teorema de convergencia monótona asegura entonces un límite finito. Una sucesión solo decreciente y acotada superiormente podría tender a −∞, como u_n = −n; por tanto, la monotonía sin precisar su sentido y la cota adecuada no basta.

10. Repaso y referencias

Debe saber obtener una fórmula explícita a partir de una relación afín, demostrar una cota por inducción y justificar el primer índice de un umbral. Para cada resultado, distinga observación, prueba de la monotonía, prueba de convergencia e identificación del límite. Estos pasos responden a preguntas diferentes y pueden exigir argumentos distintos.

El marco de progresión es el programa oficial publicado de la especialidad de Matemáticas de Terminale: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm, anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Todos los ejemplos, demostraciones desarrolladas y ejercicios se han redactado de forma original para LFDP. No se presenta ninguna serie de datos reales, previsión de rentabilidad o reproducción de una prueba de examen.

Capítulo 3 - Límites: establecer un comportamiento sin confundir cálculo y demostración

Referencia histórica - Cauchy: controlar las condiciones del análisis

El Cours d'analyse de Cauchy se publica en 1821 para la enseñanza en la École polytechnique. Forma parte del esfuerzo histórico por formular rigurosamente los resultados del análisis. La conexión útil con este capítulo es la atención a las condiciones: reconocer una expresión u observar una tendencia no basta para justificar una operación con límites. Las herramientas modernas presentadas aquí deben leerse junto con su dominio y sus hipótesis. Esta referencia sitúa una etapa de la historia; no identifica todas las formulaciones de Cauchy con las definiciones y los teoremas actuales.

Fuente histórica: Bibliothèque nationale de France - registro bibliográfico: https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073247 ; University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/

1. Qué significa acercarse a un valor

Una sucesión converge hacia L cuando sus términos terminan permaneciendo tan cerca de L como se desee. Más precisamente, para toda precisión $\varepsilon > 0$, existe un índice N tal que, para todo $n \geq N$, $|u_n - L| < \varepsilon$. El índice puede depender de la precisión solicitada. No basta con que un término esté muy cerca de L: todos los términos siguientes deben satisfacer la condición a partir de un determinado índice.

Esta formulación explica por qué un límite no es necesariamente un valor que se alcanza. Para $u_n = 1 - 1/(n + 1)$, ningún término

es igual a 1, pero la distancia vale 1/(n + 1) y se hace arbitrariamente pequeña. A la inversa, una sucesión puede tomar exactamente un mismo valor en infinitos índices sin converger hacia él: (−1)^n vale 1 en todos los índices pares y −1 en los impares. La frecuencia de un valor no sustituye a una propiedad que debe cumplirse en todos los índices suficientemente grandes.

Una sucesión no puede tener dos límites finitos distintos. Para entender la idea, si L y M son diferentes, elijamos entornos con un radio menor que la tercera parte de |L − M|. Son disjuntos. Los términos no pueden encontrarse todos a la vez en cada uno de esos entornos a partir de un mismo índice suficientemente grande. Esta unicidad permite hablar de «el límite», pero solo después de haber establecido su existencia.

2. Una primera demostración a partir de la definición

Para u_n = 1/(n + 1), demostremos la convergencia hacia cero. La distancia a cero es exactamente 1/(n + 1). Para una precisión ε > 0, elegir un entero N tal que N + 1 > 1/ε garantiza que, para todo n ≥ N, 1/(n + 1) < ε. La demostración responde directamente a la definición y muestra cómo construir un índice adecuado. No se apoya en un dibujo que parece acercarse al eje.

Para u_n = 3 + 2/(n + 1), el límite es 3, puesto que |u_n − 3| = 2/(n + 1). Sirve un índice que satisfaga N + 1 > 2/ε. El coeficiente modifica la rapidez con la que se alcanza una precisión, no el límite. Dos sucesiones pueden tener el mismo límite y distancias muy diferentes en cada etapa; no hay que confundir el destino con el ritmo de convergencia.

Los ejercicios de Terminale no exigen siempre esta redacción formal. Entender los cuantificadores sigue siendo útil para valorar un argumento. «Para ε = 0,01, los términos están cerca» demuestra, como mucho, una precisión particular. La convergencia

se refiere a toda precisión positiva, incluso a otra mucho más exigente. «Existe un índice en el que la distancia es pequeña» también olvida que la propiedad debe mantenerse después de ese índice.

3. Divergencia hacia el infinito y ausencia de límite

Una sucesión tiende hacia $+\infty$ cuando, para toda cota real A, todos los términos son mayores que A a partir de un determinado índice. El infinito no es un número al que sería igual el último término; una sucesión generalmente no tiene un último término. El símbolo describe un comportamiento. La definición de $-\infty$ es análoga, con términos que acaban siendo menores que cualquier cota.

La sucesión $2n + 1$ tiende hacia $+\infty$: basta con elegir N suficientemente grande para que $2N + 1 > A$. La sucesión $-n^2$ tiende hacia $-\infty$. En cambio, $(-1)^n$ n no tiende ni hacia $+\infty$ ni hacia $-\infty$: sus términos alternan entre valores positivos y negativos de gran magnitud. Tampoco tiene un límite finito. Por tanto, la palabra «divergente» puede designar varias situaciones que una conclusión precisa debe distinguir.

Una sucesión no acotada no tiende necesariamente hacia $+\infty$. Hay que examinar todos los índices suficientemente grandes, no solo algunos valores muy elevados. Del mismo modo, una sucesión acotada no siempre converge: la alternancia entre -1 y 1 basta para mostrarlo. Estos contraejemplos son buenas anotaciones para un cuaderno de repaso, porque impiden utilizar un teorema despojado de sus hipótesis.

4. Operaciones con límites y formas indeterminadas

Si u_n y v_n convergen hacia límites finitos L y M, su suma converge hacia L + M y su producto hacia LM. Si M ≠ 0 y el cociente está definido a partir de un determinado índice, u_n/v_n converge hacia L/M. La condición sobre el denominador es esencial. Las reglas usuales permiten simplificar un estudio cuando son aplicables; no constituyen una aritmética sin restricciones con símbolos infinitos.

Las formas $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ y 0/0 son indeterminadas: los límites por separado no permiten concluir. Por ejemplo, n^2/n tiende hacia $+\infty$, n/n tiende hacia 1 y n/n^2 tiende hacia cero; los tres cocientes tienen la misma forma ∞/∞. Del mismo modo, $(n + 1) - n$ vale 1, mientras que $n^2 - n$ tiende hacia $+\infty$. La ausencia de una conclusión automática no significa que no haya un método.

Es necesario transformar la expresión, poner de manifiesto un término dominante, factorizar o racionalizar. Las transformaciones deben respetar los dominios. Después, las reglas de cálculo se pueden aplicar a una expresión mejor adaptada. Buscar de inmediato un valor numérico muy grande puede sugerir la respuesta, pero no sustituye al razonamiento e incluso puede ocultar un error de redondeo.

5. Términos dominantes en un cociente

Para $u_n = (3n^2 - 2n + 5)/(2n^2 + n + 1)$, dividamos el numerador y el denominador entre n^2 para $n \geq 1$. Se obtiene $[3 - 2/n + 5/n^2]/[2 + 1/n + 1/n^2]$. Cada término en $1/n$ o $1/n^2$ tiende hacia cero; el denominador tiende hacia 2, que no es nulo. Por tanto, el límite vale 3/2. El argumento no consiste en eliminar términos porque parecen pequeños: establece precisamente que tienden hacia cero en la expresión normalizada.

Si el grado del numerador es mayor que el del denominador, el cociente puede divergir con un signo determinado por los términos dominantes. Si es menor, puede tender hacia cero. Para $(-2n^3 + n)/(n^2 + 4)$, la división entre n^2 da $(-2n + 1/n)/(1 + 4/n^2)$, y por tanto una divergencia hacia $-\infty$. Es indispensable determinar el signo; decir solamente «mayor grado, luego infinito» no basta.

Las mismas transformaciones se utilizan para las funciones cuando x tiende hacia $+\infty$ o $-\infty$. Para $x \to -\infty$, cambia el signo de las potencias impares. Una fórmula estudiada únicamente para índices naturales no debe extenderse sin examen a reales negativos, en particular si contiene una raíz, un logaritmo o una potencia no entera.

6. Racionalizar una diferencia de raíces

Consideremos u_n = sqrt(n² + n) − n para n ≥ 1. Los dos términos tienden hacia $+\infty$ y su diferencia es indeterminada. Multiplicar por la expresión conjugada da u_n = n/[sqrt(n² + n) + n]. Al dividir entre n, que es positivo, se obtiene 1/[sqrt(1 + 1/n) + 1]. El límite vale 1/2. La racionalización transforma una resta delicada en un cociente cuyos límites se pueden utilizar inmediatamente.

Se ha utilizado el signo de n en sqrt(n²) = |n| = n. Para una variable x que tiende hacia $-\infty$, escribir sqrt(x²) = x sería falso. Por ejemplo, sqrt(x² + x) − x se comporta entonces como $-2x$ y tiende hacia $+\infty$, en el dominio en el que la raíz está definida. La misma apariencia algebraica no impone el mismo límite en los dos extremos del eje.

En una calculadora, un valor grande de n puede hacer que sqrt(n² + n) y n estén tan próximos en términos relativos que una parte de su diferencia se pierda por redondeo. La forma racionalizada suele ser más estable numéricamente. Esta conexión entre razonamiento simbólico y fiabilidad numérica muestra que una

simplificación no es solo una comodidad al escribir: puede mejorar la calidad del cálculo efectivo.

7. Comparación y acotación

El teorema del encaje afirma que, si a_n ≤ u_n ≤ b_n a partir de un determinado índice y si a_n y b_n tienen el mismo límite finito L, entonces u_n converge hacia L. La condición «mismo límite» es esencial. Acotar una sucesión entre 0 y 1 no demuestra su convergencia; solo establece cotas.

Para u_n = (−1)^n/(n + 1), se tiene −1/(n + 1) ≤ u_n ≤ 1/(n + 1). Las dos cotas tienden hacia cero, por lo que la sucesión converge hacia cero. No es monótona, pero su oscilación disminuye. Este ejemplo distingue claramente convergencia y monotonía. Una cota del valor absoluto, |u_n| ≤ 1/(n + 1), proporciona la misma conclusión con una notación más compacta.

Para los límites infinitos, a veces basta con una comparación. Si u_n ≥ v_n a partir de un determinado índice y v_n tiende hacia +∞, entonces u_n también tiende hacia +∞. Así, 5n + (−1)^n ≥ 5n − 1 muestra una divergencia hacia +∞ pese a una pequeña oscilación. Una cota superior que tendiera hacia +∞ no permitiría la misma conclusión: todavía dejaría abierta la posibilidad de una sucesión constante o decreciente.

8. Sucesiones monótonas acotadas y punto fijo

Una sucesión creciente y acotada superiormente converge hacia un límite finito. Una sucesión decreciente y acotada inferiormente también converge. Las cotas no dan necesariamente el valor de ese límite. Si u_n ≤ 10, nada permite concluir que su límite sea 10. El teorema asegura la convergencia; la identificación del límite exige un argumento adicional.

Para una relación u_(n+1) = f(u_n), si la sucesión converge hacia L y f es continua en el punto L, entonces L = f(L). Esta ecuación proporciona candidatos. No demuestra ni la convergencia ni la ausencia de otros candidatos. La sucesión u_(n+1) = 2u_n con u_0 = 1 diverge, aunque la ecuación L = 2L tiene la solución L = 0. La existencia de un punto fijo no significa que todas las trayectorias lo alcancen o se aproximen a él.

Otro error es elegir una cota solo para facilitar el cálculo. La cota debe demostrarse en cada índice. Para una sucesión creciente, comprobar u_0 < 5 no garantiza que todos los términos permanezcan por debajo de 5. Una demostración por inducción o una expresión explícita debe establecer esa conservación del intervalo antes de invocar el teorema de convergencia monótona.

9. Límites de funciones y límites laterales

Para una función, x puede acercarse a un valor a sin ser igual a él. El límite de f(x) cuando x tiende hacia a se refiere a los valores próximos dentro del dominio. Para f(x) = (x² − 1)/(x − 1), definida para x ≠ 1, se factoriza y se obtiene f(x) = x + 1 en ese dominio. El límite en 1 vale 2, aunque f(1) no está definida. Se puede construir una extensión continua atribuyendo el valor 2 en ese punto; se trata de una nueva definición, no de un valor ya presente.

Los límites por la izquierda y por la derecha pueden diferir. Para f(x) = 1/(x − 2), el denominador es negativo cuando x se acerca a 2 por valores inferiores y positivo cuando lo hace por valores superiores. El límite por la izquierda es −∞ y por la derecha +∞. La recta x = 2 es una asíntota vertical, pero no existe un límite infinito único sin precisar el lado.

Para f(x) = 2 + 1/x, el límite en +∞ vale 2: y = 2 es una asíntota horizontal en esa dirección. La curva no está obligada, para cualquier función, a permanecer a un solo lado de una asíntota

horizontal. Una asíntota expresa una distancia que tiende hacia cero, no una barrera material que la curva nunca pudiera cruzar.

Una asíntota oblicua se puede reconocer demostrando $f(x) - (ax + b) \to 0$. Para $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$, la división da $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. El último término tiende hacia cero en el infinito; por tanto, $y = x + 1$ es una asíntota oblicua. La propia función no converge hacia un número finito. La distancia a una recta y el valor de la función son dos objetos diferentes.

10. Exponencial y comparación del crecimiento

Para $0 < q < 1$, q^n tiende hacia cero. Una justificación accesible utiliza $1/q = 1 + h$ con $h > 0$. La desigualdad de Bernoulli $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, que se puede demostrar por inducción, da $0 < q^n \leq 1/(1 + nh)$. La cota superior tiende hacia cero. Si $-1 < q < 0$, el valor absoluto es $|q|^n$ y la misma acotación asegura también una convergencia hacia cero, pese a la alternancia.

Cuando $q > 1$, q^n tiende hacia $+\infty$. Para las funciones, los resultados usuales de comparación del crecimiento establecen, en particular, que $\ln(x)/x \to 0$ cuando $x \to +\infty$ y que la exponencial domina a las potencias en $+\infty$. Aquí estos resultados son propiedades del curso que hay que conocer; no quedan «demostrados» por una tabla de valores. Se pueden utilizar para $e^x/x^2 \to +\infty$ o $x^2e^{(-x)} \to 0$, después de examinar el dominio y reescribir el producto como cociente.

No es necesario introducir una regla avanzada de derivación de cocientes de límites para tratar todos estos casos. Emplear un resultado aún no estudiado sin justificación puede ocultar las hipótesis y el método esperado. Las factorizaciones, las comparaciones y las propiedades del curso ya ofrecen una amplia variedad de razonamientos adecuados a Terminale.

11. Ejercicios resueltos

A - Cociente. Hallar el límite de $(4n^2 + 3)/(n^2 - n + 2)$. **Solución:** división entre n^2: $[4 + 3/n^2]/[1 - 1/n + 2/n^2] \to 4$. El denominador tiende hacia 1, lo que permite aplicar la regla del cociente.

B - Alternancia amortiguada. u_n = 7 + (−1)^n/n para n ≥ 1. **Solución:** |u_n − 7| = 1/n → 0, por lo que u_n → 7. La sucesión no es monótona; esta ausencia no impide la convergencia.

C - Conjugada. v_n = sqrt(n² + 4n) − n. **Solución:** v_n = 4/[sqrt(1 + 4/n) + 1], así que el límite es 2. El factor 4 no se elimina: permanece en el numerador después de la normalización.

D - Límite y valor. f(x) = x + 2 para x ≠ 0 y f(0) = 10. **Solución:** el límite en cero vale 2, pero el valor vale 10. La función no es continua en cero. Los valores próximos determinan el límite; el valor elegido en el punto también determina la continuidad.

E - Punto fijo. u_0 = 2 y u_(n+1) = −u_n. **Solución:** los términos alternan entre 2 y −2. La ecuación L = −L da 0, pero la sucesión no converge. No se puede pasar al límite en una relación antes de haber establecido o supuesto explícitamente la existencia de ese límite.

12. Repaso y referencias

En cada estudio, hay que indicar la dirección o el lado del límite, comprobar el dominio y buscar una posible forma indeterminada. Después se elige una transformación y un teorema cuyas hipótesis se verifiquen. Una conclusión distingue entre límite finito, divergencia hacia un infinito y ausencia de límite. Los redondeos y las gráficas son comprobaciones, no sustitutos de estas etapas.

Marco de progresión: programa oficial publicado de la especialidad de matemáticas de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y su anexo ht

tps://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Ejemplos, demostraciones desarrolladas y ejercicios originales LFDP; no se reproduce ningún texto de manual, figura o ejercicio de examen de terceros.

Capítulo 4 - Continuidad: demostrar existencia, unicidad y acotación

Referencia histórica - Bolzano: la existencia requiere una demostración

En una memoria de 1817, Bernard Bolzano presenta una demostración del teorema de los valores intermedios buscando una justificación analítica. Este hecho aclara la diferencia entre ver cómo una curva atraviesa un nivel y establecer la existencia de una solución bajo hipótesis precisas. Nuestro capítulo aplica esta distinción a la continuidad y después separa existencia, unicidad y aproximación numérica. El hito histórico no sustituye a la demostración ni permite olvidar una hipótesis; invita precisamente a preguntar por qué el resultado es válido.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

1. Tres preguntas que no hay que confundir

Cuando aparece una ecuación f(x) = k, se plantean tres preguntas: ¿tiene al menos una solución, tiene una sola y cómo aproximar esa solución? Una calculadora que muestra un número responde a veces a la tercera sin haber respondido a las dos primeras. Una demostración de existencia no proporciona necesariamente una expresión exacta. Una demostración de unicidad no demuestra automáticamente que exista una solución. Separar estas preguntas hace que la resolución sea más segura y más legible.

La continuidad desempeña un papel central en la existencia. La monotonía estricta puede asegurar la unicidad en un intervalo. Después, un método numérico construye una acotación o una aproximación. Por tanto, el razonamiento complementa al cálculo:

indica qué busca y por qué puede tener éxito. No se debe presentar el último número mostrado como una solución exacta si el algoritmo solo ha proporcionado un valor aproximado.

El dominio forma parte del problema. Una función que contiene una raíz o un logaritmo impone restricciones; un denominador puede excluir un punto. El teorema de los valores intermedios exige continuidad en todo el intervalo estudiado. Comprobar únicamente los valores en los dos extremos no sustituye a esta condición. Una discontinuidad o un punto ausente pueden impedir que el argumento funcione.

2. Continuidad en un punto y en un intervalo

Una función f es continua en un punto a de su dominio cuando el límite de f(x), al tender x hacia a, es f(a), con una aproximación adecuada al dominio. Esta definición conecta los valores próximos con el valor en el punto. Si f(a) no está definida, no se puede afirmar su continuidad en a; eventualmente se puede construir una extensión después de estudiar el límite.

Las funciones polinómicas son continuas en los reales. Una función racional es continua allí donde su denominador no se anula. La exponencial es continua en los reales; el logaritmo, en los reales estrictamente positivos. Las sumas, los productos y las composiciones de funciones continuas son continuos en sus dominios adecuados. El cociente exige un denominador no nulo. Este conjunto de herramientas permite justificar la continuidad sin volver a su definición en cada ejercicio.

La imagen intuitiva de un trazado «sin levantar el lápiz» es útil, pero limitada. Depende de la escala del dibujo y no constituye una definición general. Una curva calculada con algunos puntos puede ocultar un hueco o una variación muy rápida. A la inversa, una función definida a trozos puede ser continua si sus valores y sus

límites enlazan correctamente. El nombre de la fórmula no decide por sí solo la propiedad.

3. Enlace de una función definida a trozos

Tomemos $f(x) = x^2$ para $x \leq 1$ y $f(x) = ax + b$ para $x > 1$. A la izquierda de 1, el límite vale 1; el valor $f(1)$ también vale 1. A la derecha, el límite vale $a + b$. Por tanto, la continuidad en 1 exige $a + b = 1$. Existen infinitas parejas que satisfacen esta condición. Exigir únicamente continuidad no determina necesariamente todos los parámetros.

Si también se exige derivabilidad en el punto de enlace, la derivada por la izquierda vale 2 y por la derecha a; debe ser $a = 2$, y después $b = -1$. Esta condición adicional responde a una pregunta distinta. Una función puede ser continua sin ser derivable, como $|x|$ en cero. Su gráfica no presenta un salto, pero las pendientes por la izquierda y por la derecha son diferentes.

En una modelización, la continuidad puede expresar que una magnitud no cambia instantáneamente de valor al atravesar un umbral. La derivabilidad puede expresar una transición de pendiente. Sin embargo, estas propiedades deben justificarse por el problema real; no son exigencias estéticas universales. Una tarifa definida por tramos, por ejemplo, puede presentar saltos deliberadamente. Un modelo debe describir lo pertinente, no solo una curva agradable de mirar.

4. Teorema de los valores intermedios

Si f es continua en un intervalo cerrado [a ; b], todo valor k comprendido entre f(a) y f(b) se alcanza al menos una vez en ese intervalo. Para buscar una raíz, se toma k = 0. Si f(a) y f(b) tienen signos opuestos, la continuidad garantiza al menos un c tal que f(c) = 0. Si uno de los valores ya es nulo, el extremo correspondiente es por sí mismo una solución.

El teorema afirma existencia, no necesariamente unicidad. Para $f(x) = x^2 - 1$ en $[-2 ; 2]$, los valores en los extremos son ambos positivos; sin embargo, la función tiene dos raíces. El cambio de signo en los extremos es una condición suficiente para una raíz en el caso usual, no una condición necesaria para cualquier existencia de una raíz. No hay que deducir «no hay cambio de signo, luego no hay solución».

La continuidad es indispensable. Una función igual a -1 para $x < 0$ y a 1 para $x \geq 0$ cambia de signo entre -1 y 1 sin tomar el valor cero. La función 1/x también presenta signos opuestos a ambos lados de cero, pero no está definida en todo ese intervalo. Estos ejemplos refutan una versión incorrecta del teorema que conservara únicamente los signos en los extremos.

5. Añadir la unicidad mediante la monotonía

Si f es estrictamente monótona en un intervalo, no puede tomar un mismo valor en dos puntos distintos de ese intervalo. Así, la continuidad y la acotación de un valor dan la existencia, mientras que la monotonía estricta da la unicidad. Las justificaciones pueden ser breves, pero sus funciones deben seguir siendo distintas en la redacción.

Estudiemos f(x) = e^x − 3x en [0 ; 1]. La función es continua, f(0) = 1 y f(1) = e − 3 < 0. Por tanto, existe una raíz en]0 ; 1[. Su derivada f'(x) = e^x − 3 es estrictamente negativa en [0 ; 1],

puesto que e^x ≤ e < 3. La función es estrictamente decreciente; la raíz es única allí. No es necesaria ninguna expresión elemental exacta para establecer estos dos resultados.

En un intervalo más amplio, la misma ecuación puede tener otra solución. Aquí f(1) < 0 y f(2) = e² − 6 > 0 garantizan al menos una raíz entre 1 y 2. La unicidad demostrada en [0 ; 1] no significa, por tanto, unicidad en todos los reales. El dominio de la conclusión debe indicarse con tanto cuidado como el dominio de la función.

Una derivada estrictamente positiva en todas partes es una condición suficiente para el crecimiento estricto, no una condición necesaria. La función x³ es estrictamente creciente aunque su derivada se anule en cero. Para a < b, la diferencia b³ − a³ = (b − a)(a² + ab + b²) es positiva: el primer factor es positivo y el segundo no puede ser nulo para dos reales distintos. Este argumento algebraico evita una generalización abusiva a partir de un único punto con derivada nula.

6. Imagen de un intervalo y extremos

La continuidad asegura que en la imagen de un intervalo no falta ningún valor situado entre dos valores alcanzados. No significa que los valores extremos sean necesariamente los de los dos extremos del intervalo. Para f(x) = x² en [−2 ; 3], los valores en los extremos son 4 y 9, pero el valor cero se alcanza en x = 0. La imagen es [0 ; 9], no [4 ; 9]. Hay que estudiar las variaciones o los extremos para conocer toda la imagen.

Una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza un mínimo y un máximo. Este resultado no se traslada sin examen a un intervalo abierto. La función f(x) = x en]0 ; 1[está acotada, pero no alcanza ni cero ni uno; por tanto, no tiene mínimo ni máximo en ese dominio. El ínfimo y el supremo existen como números, sin ser necesariamente valores de la función.

Esta distinción es útil para la optimización. Un cálculo puede señalar un valor situado fuera del dominio o en un extremo excluido. La respuesta debe entonces indicar si existe un máximo alcanzado o solamente una cota superior a la que se puede aproximar. Sustituir un intervalo abierto por uno cerrado para simplificar el estudio cambia el problema; esta modificación debe justificarse y no realizarse silenciosamente.

7. Bisección: conservar un invariante

La bisección busca una raíz de una función continua en un intervalo cuyos valores en los extremos tienen signos opuestos. Se calcula el punto medio m = (a + b)/2. Si f(m) = 0 exactamente, el problema está resuelto. Si no, se conserva la mitad cuyos extremos mantienen signos opuestos. Cada etapa divide entre dos la longitud del intervalo y preserva la existencia de al menos una raíz en el intervalo conservado.

El cambio de signo es el invariante lógico del método. Si la raíz es única, los intervalos sucesivos siempre la acotan. Después de N divisiones de un intervalo inicial de longitud L, la longitud es L/2^N. Tomando el punto medio final como aproximación, el error absoluto es como máximo L/(2^(N+1)), bajo las hipótesis exactas del modelo matemático. Los dos criterios, «anchura» y «error del punto medio», deben distinguirse.

Para obtener una anchura menor o igual que 0,001 a partir de un intervalo de longitud 1, se necesita 2^N ≥ 1000; por tanto, N = 10 divisiones bastan: 1/1024 ≈ 0,0009766. Nueve divisiones dan aproximadamente 0,001953 y no bastan. El recuento depende del momento en el que se mide la anchura; indicar claramente una inicialización y una etapa evita un desfase de un índice.

8. Una primera ejecución explicada

Volvamos a f(x) = e^x − 3x en [0 ; 1], donde la raíz es única. En el punto medio 0,5, f vale aproximadamente 0,1487, por lo que es positiva. Como f(1) es negativa, se conserva [0,5 ; 1]. El nuevo punto medio 0,75 da aproximadamente −0,1330, por lo que se conserva [0,5 ; 0,75]. En el punto medio 0,625, f vale aproximadamente −0,00675; se conserva [0,5 ; 0,625].

El intervalo no debe elegirse porque el punto medio «parece estar cerca» de cero. El signo y la continuidad justifican la mitad conservada. Un valor pequeño de f(m) no garantiza por sí solo que m esté muy cerca de la raíz: si la función es casi plana, una distancia horizontal importante puede corresponder a una pequeña distancia vertical. La acotación proporciona una información geométrica distinta del residuo f(m).

Un programa puede utilizar la prueba «mismos signos» entre f(a) y f(m). En cálculo exacto, un producto positivo indica este caso. En cálculo de coma flotante, valores extremadamente grandes o pequeños pueden desbordarse o redondearse a cero; comparar los signos por separado puede ser más robusto. Esta observación no exige dominar todo el análisis numérico, pero invita a no confundir una operación informática con una demostración exacta.

9. Otros métodos y razones para comparar

El método de Newton utiliza la tangente: x_(n+1) = x_n − f(x_n)/f'(x_n), cuando el denominador no es nulo. Puede converger muy deprisa en condiciones favorables, pero un mal punto inicial puede conducir a una divergencia, un ciclo o un valor fuera del dominio. Se presenta aquí como una perspectiva complementaria, no como un sustituto automático del método de bisección ni de lo que espere el profesor.

Para f(x) = x³ − 2x + 2 y x_0 = 0, Newton da x_1 = 0 − 2/(−2) = 1. Después, f(1) = 1 y f'(1) = 1, por lo que x_2 = 0. Los valores alternan entre 0 y 1 sin acercarse a una raíz. Un programa que se detiene después de algunas iteraciones puede mostrar un número sin haber obtenido la solución. Por tanto, un método más rápido en una situación favorable no es un método universalmente más fiable.

La bisección es lenta en comparación con ciertos métodos locales, pero su acotación es fácil de garantizar si se respetan las hipótesis. Se pueden combinar métodos, por ejemplo utilizando una acotación segura y una etapa más rápida controlada. Esta comparación ilustra una idea general: la eficiencia numérica, las garantías matemáticas y la facilidad de comprobación son criterios distintos.

10. De una ecuación a una desigualdad

Una raíz puede organizar el signo de una función. Si f es estrictamente decreciente en [a ; b] y tiene una única raíz α en ese intervalo, f es positiva antes de α y negativa después. Resolver f(x) ≥ 0 en [a ; b] da entonces [a ; α]. La raíz se puede describir exactamente como «la única solución de...» aunque solo se conozca una acotación decimal.

Para f(x) = e^x − 3x en [0 ; 1], el resultado anterior proporciona esta organización del signo. No se sustituye α por una aproximación redondeada en una respuesta que se presenta como exacta. Es posible dar primero el conjunto exacto con α y después una acotación para interpretarlo. Esta separación evita incluir o excluir valores próximos al umbral basándose solamente en un redondeo.

Una función no monótona exige una tabla de signos más completa. Varias raíces pueden dividir el dominio en varios intervalos; los

signos no siempre se alternan cuando una raíz es múltiple. Por ejemplo, $(x - 1)^2$ se anula en 1 sin hacerse negativa. Por tanto, el teorema de existencia y las raíces no sustituyen al estudio de la estructura de la expresión.

11. Ejercicios resueltos

A - Continuidad en el enlace. $f(x) = 2x + 1$ para $x < 2$ y $f(x) = x^2 + c$ para $x \geq 2$. **Solución:** el límite por la izquierda en 2 vale 5; el valor y el límite por la derecha valen $4 + c$. La continuidad exige $c = 1$. Esto no asegura la derivabilidad: las derivadas en el enlace serían 2 y 4.

B - Existencia. $P(x) = x^3 - 4x + 1$. Demostrar que hay una raíz entre 0 y 1. **Solución:** el polinomio es continuo, $P(0) = 1$ y $P(1) = -2$. El teorema de los valores intermedios asegura al menos una raíz. En $[0 ; 1]$, $P'(x) = 3x^2 - 4 < 0$, lo que asegura su unicidad en ese intervalo. Esta conclusión no se refiere a todos los reales.

C - Número de divisiones. El intervalo inicial tiene una anchura de 8. ¿Qué anchura se obtiene después de seis divisiones? **Solución:** 8/2^6 = 0,125. El punto medio tiene un error máximo de 0,0625 respecto de cualquier raíz que siga estando acotada. No se ha utilizado el valor de la función en el punto medio para obtener esta cota del error.

D - TVI mal aplicado. $f(x) = 1/x$ y $f(-1)f(1) < 0$. **Solución:** la función no es continua en $[-1 ; 1]$, puesto que no está definida en cero. El teorema no se aplica. Además, no existe ninguna raíz de $1/x$ en su dominio.

E - Unicidad mal deducida. Una función continua tiene $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. ¿Tiene exactamente una raíz? **Solución:** no necesariamente; puede atravesar el eje varias veces. Hace falta una propiedad adicional, como la monotonía estricta en el intervalo, u otra demostración de unicidad.

12. Repaso y referencias

Para practicar, redacte por separado los párrafos de existencia, unicidad y aproximación. En el primero, compruebe la continuidad y los valores en los extremos; en el segundo, justifique la propiedad que impide dos soluciones; en el tercero, indique el invariante y la precisión. Después, reconstruya un ejemplo en el que cada hipótesis ausente haga fracasar una conclusión.

El programa oficial publicado de la especialidad de matemáticas de Terminale proporciona el marco de progresión: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Las situaciones, formulaciones y ejercicios son originales LFDP. El complemento sobre Newton aclara los límites de un método numérico; no constituye una exigencia de examen anunciada ni una garantía del funcionamiento de un programa.

Capítulo 5 - Derivación y optimización: pasar de una variación local a una conclusión

Referencia histórica - Leibniz: calcular las variaciones y después justificarlas

En 1684, Leibniz publica en las Acta Eruditorum un artículo sobre su cálculo diferencial, con reglas de derivación y la notación d. La biografía institucional señala también que ese artículo no presentaba las demostraciones de dichas reglas. Para repasar hoy, una regla operativa debe seguir distinguiéndose de las razones y condiciones que la hacen válida. El capítulo conecta cálculo de la derivada, dominio e interpretación del signo. Esta fecha es una referencia de publicación, sin atribución exclusiva de la invención del cálculo infinitesimal.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

1. Entender la derivada antes de utilizarla

El cociente [f(a + h) − f(a)]/h mide una variación media entre dos puntos para h ≠ 0. Si este cociente tiene un límite finito cuando h tiende hacia cero, f es derivable en a y ese límite es f'(a). Así, la derivada expresa una información local: describe la variación en el entorno de un punto, no necesariamente la evolución global en todo el dominio.

Geométricamente, f'(a) es la pendiente de la tangente a la gráfica en el punto de coordenadas (a ; f(a)). Su ecuación es y = f(a) + f'(a)(x − a). La ecuación contiene tanto la pendiente como un punto; escribir solamente y = f'(a)x olvida, en general, la ordenada

en el origen. Una tangente horizontal significa f'(a) = 0; no significa automáticamente que f(a) = 0.

Si f representa una distancia en metros y x un tiempo en segundos, la derivada tiene la unidad m/s. Si f representa un área en m² en función de una longitud en m, su derivada tiene la unidad m. Por tanto, la derivación cambia las unidades según la variable. Esta coherencia permite detectar una confusión entre una función y su derivada en un problema aplicado.

2. Derivabilidad y aproximación local

Una función derivable en un punto es continua allí, pero la recíproca es falsa. La función |x| es continua en cero y no tiene derivada en ese punto, porque las tasas de variación por la izquierda y por la derecha tienden hacia −1 y 1. La continuidad enlaza los valores; la derivabilidad exige además una variación local compatible con una pendiente única.

Cuando f es derivable en a, se puede escribir f(a + h) = f(a) + f'(a)h + un resto que se vuelve despreciable frente a h. Por tanto, la aproximación afín f(a + h) ≈ f(a) + f'(a)h es local. No es una igualdad general y su precisión depende de la función y del tamaño de h. Para f(x) = x² alrededor de a = 2, se obtiene f(2 + h) = 4 + 4h + h²: el resto es explícitamente h².

Para h = 0,10, la aproximación da 4,40 y el valor exacto 4,41. Para h = 1, da 8 frente a 9. Una misma fórmula lineal pierde precisión al alejarse del punto. Sin conocer el resto o una cota de este, no se puede transformar una tangente en una garantía del error numérico. Esta prudencia conecta el concepto local con su uso en los cálculos aproximados.

3. Reglas de derivación y dominios

Para dos funciones derivables u y v, la derivada de una suma es u' + v'. La de un producto es u'v + uv', no u'v'. Para un cociente u/v definido con v ≠ 0, la derivada es (u'v − uv')/v². La constante multiplicativa se conserva: (ku)' = ku'. Los dominios deben determinarse antes del cálculo o al mismo tiempo que este.

Para una composición g(u(x)), la derivada es g'(u(x))u'(x). El factor u' corresponde a la variación de la expresión interior. Así, (e^(3x²))' = 6x e^(3x²). Para ln(u(x)), con u(x) > 0, la derivada es u'/u. Para sqrt(u(x)), la fórmula u'/(2sqrt(u)) se puede utilizar en los puntos donde u > 0 y se cumplen las demás hipótesis de derivabilidad. Una expresión definida en un punto no es necesariamente derivable allí.

Consideremos f(x) = ln(x² + 1). Su dominio es el conjunto de todos los reales, puesto que x² + 1 > 0, y f'(x) = 2x/(x² + 1). Para g(x) = ln(x² − 1), el dominio es]−∞ ; −1[∪]1 ; +∞[. La fórmula g'(x) = 2x/(x² − 1) se parece a la anterior, pero los dominios son distintos. Un cálculo formal correcto con una expresión no exime de definir dónde está permitido.

4. Del signo de la derivada a las variaciones

En un intervalo donde f es derivable, una derivada positiva o nula asegura que la función es creciente; una derivada negativa o nula asegura que es decreciente. Una derivada estrictamente positiva asegura un crecimiento estricto. Deben examinarse las formulaciones exactas y los posibles puntos aislados con derivada nula antes de concluir que existe monotonía estricta. Un estudio completo puede emplear una tabla de signos y argumentos complementarios.

El papel del intervalo es importante. Una función racional puede tener una derivada del mismo signo en dos partes del dominio

separadas por un valor prohibido; esto no basta para declararla monótona en su unión. Para f(x) = 1/x, la derivada es negativa en cada intervalo]−∞ ; 0[y]0 ; +∞[. Sin embargo, comparar x = −1 y x = 1 en el conjunto disjunto muestra f(−1) < f(1), lo que no corresponde a un decrecimiento global.

La derivada nula en un punto no garantiza un extremo. Para x^3, la derivada se anula en cero, pero la función sigue creciendo. Un cambio de signo de f' de positivo a negativo produce un máximo local; el cambio inverso produce un mínimo local. Después hay que comparar con los demás valores candidatos para determinar un máximo o mínimo global en el dominio solicitado.

5. Un estudio completo de una función

Tomemos f(x) = (x + 1)e^(−x). Está definida y es derivable en los reales. Por la regla del producto, f'(x) = e^(−x) − (x + 1)e^(−x) = −xe^(−x). Como la exponencial siempre es positiva, el signo de la derivada es el de −x. La función es estrictamente creciente en]−∞ ; 0] y estrictamente decreciente en [0 ; +∞[. Su máximo global vale f(0) = 1.

En +∞, el producto (x + 1)e^(−x) tiende hacia cero por comparación del crecimiento, permaneciendo positivo para x > −1. En −∞, x + 1 tiende hacia −∞ y e^(−x) hacia +∞; el producto tiende hacia −∞. La función se anula en x = −1. Estas informaciones organizan una gráfica coherente: paso por (−1 ; 0), subida hasta (0 ; 1) y después decrecimiento hacia la asíntota horizontal y = 0 por la derecha.

Si el problema exige x en [0 ; 4], el máximo sigue siendo 1 y el mínimo es f(4) = 5e^−4, aproximadamente 0,0916. El resultado en un dominio restringido debe estudiarse con sus extremos. Un punto crítico pertinente globalmente puede quedar excluido por una restricción; a la inversa, un extremo del dominio puede

convertirse en el lugar de un óptimo aunque la derivada no sea nula allí.

6. Construir una función objetivo bajo restricciones

La optimización comienza antes de la derivada. Hay que definir la cantidad que se quiere optimizar, las variables, sus unidades y las restricciones. Para una caja abierta de base cuadrada de lado x y altura h, un volumen impuesto V da $x^2h = V$, por lo que $h = V/x^2$ para $x > 0$. La superficie ideal de material es $A = x^2 + 4xh$, es decir, $A(x) = x^2 + 4V/x$. Se cuentan el fondo y las cuatro caras; en este modelo no hay tapa.

Para $V = 32$ dm³, $A(x) = x^2 + 128/x$ en dm², con x en dm. Su derivada vale $A'(x) = 2x - 128/x^2 = 2(x^3 - 64)/x^2$. El denominador es positivo, por lo que la derivada es negativa para $0 < x < 4$ y positiva para $x > 4$. La superficie mínima se obtiene para $x = 4$ dm; la altura es entonces $32/16 = 2$ dm y la superficie vale $16 + 32 = 48$ dm².

Después hay que interpretar las restricciones reales dadas por el ejercicio. Si x debiera pertenecer a [2 ; 3], el valor 4 sería inadmisible y A sería decreciente en todo ese intervalo: el mínimo estaría allí en $x = 3$. Un cálculo de un óptimo sin dominio proporciona una respuesta a un problema incompleto. El espesor, el corte, la resistencia y las pérdidas de material están ausentes del modelo; la caja ficticia no es un plano de fabricación certificado.

7. Optimización local y global

Un mínimo local significa que los valores próximos son mayores o iguales; un mínimo global compara con todos los valores del dominio. Una función puede tener varios extremos locales. Buscar f' = 0 proporciona candidatos interiores, no una lista universal de los extremos: también deben examinarse los puntos no derivables y los extremos del intervalo según el dominio.

Para f(x) = x² en [−1 ; 2], el mínimo está en cero y el máximo en 2. La derivada en 2 vale 4, no cero. El máximo se encuentra en un extremo del dominio; no hay ninguna contradicción con la condición usual sobre un extremo interior derivable. Para |x| en [−1 ; 1], el mínimo está en cero aunque la función no sea derivable allí. Estos dos ejemplos delimitan claramente las hipótesis.

Por tanto, la palabra «candidato» es útil. Se determinan los puntos críticos, los extremos del intervalo y las posibles singularidades admisibles, y después se comparan sus valores o sus variaciones. Para un dominio no acotado, también hay que examinar los límites. Una función puede admitir una cota superior sin alcanzarla: f(x) = 1 − e^(−x) en [0 ; +∞[se acerca a 1, pero nunca es igual a él.

8. Derivada y movimiento: ¿distancia o desplazamiento?

Una posición ficticia es x(t) = 12t − t³ para t en [0 ; 3], con los coeficientes y las unidades adecuados. La velocidad es v(t) = 12 − 3t² y la aceleración a(t) = −6t. La velocidad es positiva antes de t = 2 s, nula en ese instante y después negativa. La posición aumenta hasta x(2) = 16 m y después disminuye hasta x(3) = 9 m.

El desplazamiento entre los instantes cero y tres segundos es de 9 m. La distancia recorrida vale 16 + (16 − 9) = 23 m, porque hay un cambio de sentido. Por tanto, derivar la posición y estudiar el signo de la velocidad permite resolver una pregunta geométrica sobre el

trayecto. Emplear solamente x(3) − x(0) como distancia olvidaría la fase de regreso.

El signo de la aceleración no dice directamente si la rapidez aumenta o disminuye. Antes de dar la vuelta, v > 0 y a < 0: el módulo de la velocidad disminuye. Después, v < 0 y a < 0: aumenta. Esta conexión con la física muestra por qué los signos y los vectores deben interpretarse, no solo calcularse. La derivada proporciona una relación; el significado de las variables proporciona la respuesta al problema.

9. Comprobar una derivada mediante varios controles

Una comprobación puede utilizar la estructura, el signo esperado y una diferencia numérica. Para f(x) = e^(−2x), una derivada positiva sería sospechosa, puesto que la función decrece. La fórmula correcta es −2e^(−2x). Para un polinomio, el grado de la derivada disminuye en una unidad si el término dominante no es constante. Para una función compuesta, hay que buscar explícitamente el factor interior que suele olvidarse.

Un cociente de diferencias con un h pequeño puede comprobar un valor de la derivada: [f(a + h) − f(a)]/h debe aproximarse a f'(a). No demuestra la fórmula en todo el dominio y puede sufrir errores de redondeo cuando h es demasiado pequeño. Una diferencia central [f(a + h) − f(a − h)]/(2h) puede ser útil, pero exige que ambos puntos pertenezcan al dominio.

La coherencia dimensional sigue siendo otro control. En un problema de superficie en función de una longitud, una derivada expresada en m² en lugar de m revela un error de representación o de unidad. Una comprobación independiente no consiste en copiar el mismo cálculo con las mismas etapas: hay que buscar una propiedad o un método capaz de detectar otro tipo de error.

10. Ejercicios resueltos

A - Producto y composición. Derivar f(x) = x²e^(3x) en los reales. **Solución:** f' = 2xe^(3x) + 3x²e^(3x) = xe^(3x)(2 + 3x). El factor 3 procede de la expresión interior. Los ceros de la derivada son 0 y −2/3; su naturaleza todavía requiere una tabla de signos.

B - Cociente. Derivar g(x) = (x + 1)/(x − 2). **Solución:** el dominio excluye 2 y g' = [(x − 2) − (x + 1)]/(x − 2)² = −3/(x − 2)². La función es decreciente en cada intervalo de su dominio, sin que pueda deducirse un decrecimiento global en su unión.

C - Tangente. Para f(x) = x² + 1, hallar la tangente en a = −1. **Solución:** f(−1) = 2 y f'(−1) = −2, por lo que y = 2 − 2(x + 1) = −2x. La recta pasa efectivamente por (−1 ; 2). Una pendiente negativa no significa que la ordenada del punto sea negativa.

D - Extremos. Estudiar h(x) = x³ − 3x en [−2 ; 2]. **Solución:** h' = 3(x² − 1), positiva fuera de [−1 ; 1] y negativa en el interior. Los valores candidatos son h(−2) = −2, h(−1) = 2, h(1) = −2 y h(2) = 2. El máximo global 2 se alcanza en dos puntos y el mínimo −2 también. Un extremo global no es necesariamente único.

E - Dominio. Derivar k(x) = ln(2 − x). **Solución:** el dominio es x < 2 y k' = −1/(2 − x). La función es estrictamente decreciente en este dominio. Escribir 1/(2 − x) olvidaría la derivada interior; estudiar x > 2 olvidaría el dominio real del logaritmo.

F - Aproximación. Estimar (3,02)² mediante una tangente a x² en 3 y después hallar la diferencia exacta. **Solución:** la aproximación es 9 + 6×0,02 = 9,12. El valor exacto es 9,1204; la diferencia vale (0,02)² = 0,0004. El cálculo del resto es posible aquí porque la función se conoce explícitamente.

11. Repaso y referencias

Un repaso útil consta de cuatro acciones: determinar el dominio, derivar con la estructura correcta, estudiar los signos en intervalos e interpretar los extremos y las restricciones. Repita una derivación sin formulario y explique cada factor. Para la optimización, compruebe que la función objetivo representa correctamente todas las cantidades contadas y después que la solución pertenece al dominio admisible.

Referencia de progresión: programa publicado de la especialidad de matemáticas de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm ; anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Todas las explicaciones y situaciones son originales LFDP, sin reproducir ejercicios de examen ni textos de manuales. Las aplicaciones sirven para entender los métodos y no certifican ninguna instalación, fabricación o previsión real.

Capítulo 6 - Convexidad: comparar una curva, sus cuerdas y sus tangentes

Referencia histórica - Jensen: la convexidad permite comparar

Johan Ludwig Jensen publica en 1906 en Acta Mathematica una desigualdad relativa a las funciones convexas. Este hito da contexto a la idea central del capítulo: la forma de una función impone comparaciones entre valores, cuerdas y tangentes. Aquí trabajamos con las propiedades demostradas y los criterios accesibles al nivel previsto, sin convertir la desigualdad general de Jensen en un resultado adicional exigible. La historia recuerda la utilidad de la convexidad; una ilustración o un nombre célebre nunca eximen de comprobar el intervalo y las hipótesis.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jensen/

1. Una propiedad diferente de las variaciones

Las variaciones indican si los valores de una función aumentan o disminuyen. La convexidad describe otra estructura: la posición de su curva respecto de las cuerdas que unen dos de sus puntos. Una función convexa puede ser decreciente y después creciente, o decreciente en todo su dominio. Por tanto, es incorrecto emplear «convexa» como sinónimo de «creciente».

Para f(x) = (x − 1)², la función decrece hasta 1 y después crece, pero es convexa en todos los reales. Para f(x) = e^(−x), es decreciente y convexa. Estos ejemplos separan dos preguntas que el dibujo a veces puede hacer confundir. En un estudio completo, el signo de f' informa sobre las variaciones; la evolución de f' y, cuando existe, el signo de f'' informan sobre la convexidad.

Su interés es concreto. La convexidad permite comparar valores sin calcular exactamente cada uno, acotar una función mediante rectas y justificar ciertas desigualdades. También aclara la optimización: para una función convexa derivable, un punto interior donde la derivada se anula es un mínimo global en el intervalo considerado. Sigue siendo indispensable comprobar que ese punto pertenece al dominio del problema.

2. Definición mediante las cuerdas

Una función f es convexa en un intervalo I si, para todos a y b de I y todo λ en [0 ; 1], se tiene $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$. El punto $(1 - \lambda)a + \lambda b$ se encuentra entre a y b. El miembro derecho es la ordenada del punto correspondiente en la cuerda de la gráfica. Por tanto, la curva se encuentra por debajo de esa cuerda.

Para una función cóncava, la desigualdad se invierte. Una función afín es a la vez convexa y cóncava, puesto que la curva y todas las cuerdas coinciden. La convexidad estricta exige una desigualdad estricta para $a \neq b$ y $0 < \lambda < 1$. Esta precisión permite distinguir una estructura general de la ausencia de segmentos afines.

En el punto medio, $\lambda = 1/2$, la definición da $f((a + b)/2) \leq [f(a) + f(b)]/2$. Para $f(x) = x^2$, se convierte en $((a + b)/2)^2 \leq (a^2 + b^2)/2$. Al desarrollar, la diferencia entre el miembro derecho y el izquierdo vale $(a - b)^2/4$, que es positiva o nula. Esta demostración directa confirma una desigualdad particular y muestra el papel de la diferencia entre a y b.

Por tanto, la media de las imágenes no es, en general, la imagen de la media. La igualdad automática solo es válida en situaciones particulares, en especial para una función afín. Esta diferencia es útil en las aplicaciones, pero una conclusión práctica también exige comprobar que la función elegida representa realmente el fenómeno estudiado.

3. Criterio de la derivada y segunda derivada

En un intervalo donde f es derivable, f es convexa si y solo si f' es creciente. Si f es dos veces derivable, una segunda derivada positiva o nula en el intervalo asegura convexidad; si es negativa o nula, asegura concavidad. La segunda derivada expresa la variación de la pendiente. Por tanto, una pendiente negativa que se vuelve menos negativa puede corresponder a convexidad.

Para f(x) = e^(−x), f' = −e^(−x) es negativa, pero creciente, porque f'' = e^(−x) > 0. La función disminuye cada vez más despacio. Para f(x) = ln(x), en x > 0, f' = 1/x es positiva, pero decreciente, y f'' = $-1/x^2$ < 0: el logaritmo aumenta con una pendiente que disminuye. Así, las variaciones y la convexidad proporcionan dos informaciones complementarias.

Hay que estudiar el signo en un intervalo, no en un único punto. El hecho de que f''(a) > 0 proporciona información local si las condiciones adecuadas permiten extenderla, pero no demuestra convexidad en todo el dominio. Del mismo modo, la segunda derivada puede no existir en ciertos puntos de una función que, aun así, es convexa: |x| es un ejemplo. La definición mediante las cuerdas es más general que el criterio práctico de la segunda derivada.

4. Tangentes y demostración de una desigualdad

Para una función convexa derivable, la curva está por encima de cada una de sus tangentes en el intervalo de convexidad. En el punto a, esto se escribe f(x) ≥ f(a) + f'(a)(x − a). Para una función cóncava, la curva está por debajo. Las dos descripciones, «por debajo de las cuerdas» y «por encima de las tangentes», no se contradicen: una cuerda une dos puntos distintos y una tangente describe una pendiente local.

Una justificación del resultado para una función convexa consiste en definir h(x) = f(x) − f(a) − f'(a)(x − a). Su derivada es f'(x) − f'(a). Puesto que f' es creciente, h' es negativa o nula antes de a y positiva o nula después de a. Así, h alcanza su mínimo en a, donde h(a) = 0. Se obtiene h(x) ≥ 0. La demostración utiliza las variaciones de una función auxiliar y proporciona una herramienta reutilizable.

Para f(x) = e^x, la tangente en cero es y = 1 + x. Por tanto, la convexidad da e^x ≥ 1 + x para todo real x. Esta desigualdad es una cota, no una aproximación siempre precisa. Para x muy negativo, la recta puede ser negativa mientras que la exponencial sigue siendo positiva. Para x próximo a cero, proporciona una aproximación local cuyo error exige un estudio adicional.

5. Acotar el logaritmo

El logaritmo es cóncavo en los reales positivos. Su tangente en 1 es y = x − 1. Se obtiene ln(x) ≤ x − 1 para x > 0, con igualdad en 1. Al sustituir x por 1 + h, esto da ln(1 + h) ≤ h para h > −1. El dominio es indispensable; ln(1 + h) no es real si h ≤ −1.

Otra tangente proporciona una cota inferior. Tomemos la tangente a ln en el punto x > 0 y evaluemos su cota superior en el punto 1: ln(1) ≤ ln(x) + (1/x)(1 − x). Como ln(1) = 0, se obtiene ln(x) ≥ 1 − 1/x. Juntas, las dos cotas dan 1 − 1/x ≤ ln(x) ≤ x − 1 para x > 0.

Para x = 1,10, esta acotación se convierte en 0,090909... ≤ ln(1,10) ≤ 0,10. El valor numérico es aproximadamente 0,09531. La acotación no depende de este último valor: se demuestra antes del cálculo aproximado. Para valores de x alejados de 1, las cotas pueden ser poco ajustadas. Una acotación válida no es necesariamente la mejor para cualquier pregunta.

6. Puntos de inflexión: un cambio de convexidad

Un punto de inflexión se asocia a un cambio de convexidad en el entorno de un punto de la curva. Para una función suficientemente regular, un cambio de signo de f'' a ambos lados permite a menudo identificarlo. La igualdad f''(a) = 0 por sí sola no basta. Hay que examinar el signo o la convexidad alrededor del punto y comprobar que este pertenece a la curva.

Para f(x) = x^3, f''(x) = 6x cambia de signo en cero: la función es cóncava a la izquierda y convexa a la derecha. El origen es un punto de inflexión. Para g(x) = x^4, g''(x) = $12x^2$ se anula en cero, pero sigue siendo positiva a ambos lados; no hay cambio de convexidad. El punto cero es un mínimo, no un punto de inflexión.

Un valor excluido del dominio no puede ser un punto de inflexión de la curva, aunque los signos de f'' difieran en dos intervalos separados. Para 1/x, la segunda derivada $2/x^3$ cambia de signo a ambos lados de cero, pero la función no está definida en cero. La conclusión correcta se refiere a la convexidad en cada uno de los dos intervalos, no a un punto inexistente.

7. Estudio detallado de un polinomio

Consideremos f(x) = x^4 − $4x^3$. Las derivadas son f'(x) = $4x^2$(x − 3) y f''(x) = 12x(x − 2). El signo de f'' es positivo para x < 0, negativo para 0 < x < 2 y después positivo para x > 2. Por tanto, la función es convexa, después cóncava y después convexa en esos intervalos. Los puntos de coordenadas (0 ; 0) y (2 ; −16) son puntos de inflexión.

La primera derivada es negativa para x < 3, salvo su anulación puntual en cero, y positiva para x > 3. La función decrece hasta 3 y después crece; tiene un mínimo en x = 3, de valor −27. Por tanto, el punto de inflexión en cero no es un extremo. La misma gráfica

ilustra por qué derivada nula, extremo e inflexión son tres nociones distintas.

La tangente en 2 tiene como pendiente $f'(2) = -16$ y pasa por $(2 ; -16)$. Su ecuación es $y = -16 - 16(x - 2)$, es decir, $y = -16x + 16$. Comprobar la pendiente y que la recta pasa por el punto es un control esencial. En el entorno de un punto de inflexión, la curva cambia de posición respecto de esta tangente en este caso regular; se puede estudiar directamente factorizando la diferencia si la pregunta lo exige.

Para la tangente en cero, la pendiente y la ordenada son nulas: es el eje horizontal. Cerca de cero, $f(x) = x^3(x - 4)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha. Por tanto, la curva atraviesa su tangente en este ejemplo. Esta observación local no debe convertirse en un criterio universal sin las hipótesis de regularidad necesarias.

8. Convexidad y mínimo global

Si f es convexa y derivable en un intervalo, y $f'(a) = 0$ en un punto interior a, la desigualdad de la tangente da $f(x) \geq f(a)$ para todo x del intervalo. Por tanto, el punto a es un mínimo global. Si f es estrictamente convexa, este mínimo es único. La demostración explica por qué una propiedad local de la pendiente puede producir aquí una conclusión global: la convexidad aporta la información adicional.

Para $f(x) = x^2 + 8/x$ en $x > 0$, $f''(x) = 2 + 16/x^3 > 0$. La función es estrictamente convexa. Su derivada $2x - 8/x^2$ se anula cuando $x^3 = 4$, es decir, en a = raíz cúbica de 4. Este punto proporciona el único mínimo global. No es necesario reconstruir una larga tabla de variaciones para establecer la unicidad, pero los límites o la tabla pueden servir de comprobación.

Si el dominio admisible es un subintervalo que no incluye a, hay que buscar el mínimo en ese dominio. La convexidad no convierte un valor prohibido en admisible. Por tanto, una aplicación exige dos etapas: entender la función matemática y después respetar las restricciones del problema. Un óptimo teórico no equivale a validar una decisión real cuyos costes o riesgos no se han modelizado.

9. Medias y dispersión: una ilustración original

Tomemos dos medidas a y b. La convexidad del cuadrado da que el cuadrado de su media es menor o igual que la media de sus cuadrados. La diferencia vale $(a - b)^2/4$. Para $a = 2$ y $b = 6$, el cuadrado de la media es 16 y la media de los cuadrados 20; la diferencia es 4. Esta diferencia está ligada a la dispersión y desaparece únicamente cuando los dos valores coinciden.

Para varios números con pesos positivos cuya suma es 1, una extensión de la desigualdad de convexidad compara la función de la media ponderada con la media ponderada de los valores de la función. Esta extensión, a menudo llamada desigualdad de Jensen, se ofrece como complemento para entender; no es una exigencia de examen particular anunciada. Se demuestra aplicando repetidamente la definición a dos puntos.

El alcance práctico depende del modelo. Si un consumo ficticio es proporcional al cuadrado de una velocidad, variar la velocidad alrededor de una misma media puede aumentar la media de ese consumo. Esto no permite afirmar un balance real de un vehículo sin considerar duración, distancia, aceleraciones y mecanismos efectivos. La desigualdad matemática sigue siendo exacta; su interpretación empírica exige datos adicionales.

10. Leer y construir una tabla de convexidad

Un estudio eficaz comienza con el dominio y los intervalos donde existen las derivadas. Se calcula f'', se factoriza si es posible y se estudia su signo. Se deducen los intervalos de convexidad y concavidad, y después se comprueban los puntos candidatos a una inflexión. Las coordenadas todavía requieren calcular f en las abscisas elegidas.

No mezcle la tabla de signos de f con la de f' ni con la de f''. La primera describe los valores positivos o negativos de la función, la segunda las variaciones y la tercera, bajo las condiciones indicadas, la convexidad. Una función negativa puede ser convexa; una función positiva puede ser cóncava; un punto de inflexión puede tener una ordenada no nula. Las tres tablas responden a preguntas diferentes.

En una gráfica, observar si la pendiente aumenta o disminuye puede ayudar. Sigue siendo una comprobación cualitativa, dependiente de la escala y de la precisión del trazado. Una tabla basada en una expresión exacta proporciona una justificación más sólida. Si solo se ofrece un documento gráfico, formule las conclusiones con el nivel de precisión permitido e indique las hipótesis de lectura.

11. Ejercicios resueltos

A - Crecimiento y convexidad. Estudiar estas dos propiedades para e^(−2x). **Solución:** f' = −2e^(−2x) < 0 y f'' = 4e^(−2x) > 0. La función es decreciente y estrictamente convexa. Las propiedades no son opuestas.

B - Tangente al logaritmo. Escribir la tangente a ln(x) en 2 y compararla con la función. **Solución:** y = ln(2) + (x − 2)/2. La concavidad da ln(x) ≤ ln(2) + (x − 2)/2 para x > 0. El resultado se

refiere a todo el dominio de concavidad, no solo a un pequeño entorno de 2.

C - Inflexión. f(x) = x^5. **Solución:** f''(x) = 20x³ cambia de signo en cero. El origen es un punto de inflexión. La primera derivada 5x^4 es positiva o nula; la función sigue siendo creciente, lo que confirma que la inflexión no es un cambio obligatorio del sentido de variación.

D - Cota exponencial. Demostrar e^(2x) ≥ 1 + 2x. **Solución:** aplicar la desigualdad e^t ≥ 1 + t a t = 2x o utilizar la tangente en cero de la función e^(2x). Los dos procedimientos producen la misma cota con hipótesis válidas en todos los reales.

E - Media. Para 1 y 5, comparar el cuadrado de la media y la media de los cuadrados. **Solución:** la media es 3 y su cuadrado 9; la media de los cuadrados vale (1 + 25)/2 = 13. La diferencia 4 vale (5 − 1)²/4. Sustituir una media de cuadrados por un cuadrado de la media habría eliminado, por tanto, información sobre la dispersión.

F - Cero de f''. Una función tiene f''(a) = 0. ¿Se puede concluir que hay una inflexión? **Solución:** no. Hay que establecer un cambio de convexidad. El contraejemplo x^4 en cero muestra que un simple cero de la segunda derivada no basta.

12. Repaso y referencias

Repase la convexidad mediante tres representaciones: curva por debajo de las cuerdas, curva por encima de las tangentes y derivada creciente. Aprenda a pasar de una de ellas a una desigualdad y después a explicar su dominio. Para los puntos de inflexión, compruebe el cambio de convexidad y las coordenadas. Un cuaderno que contenga los contraejemplos x^4, |x| y 1/x ayuda a conservar las hipótesis exactas.

Marco de progresión: programa oficial publicado de la especialidad de matemáticas de Terminale,

https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Demostraciones, ejemplos y ejercicios originales LFDP. Los complementos se distinguen explícitamente de un anuncio de contenidos de examen; no se reproduce ningún manual ni ejercicio de terceros.

Capítulo 7 - Exponencial, logaritmo y trigonometría: transformar sin perder el dominio

Referencia histórica - Napier: transformar un cálculo difícil

John Napier presenta sus logaritmos en una obra de 1614, con el objetivo de simplificar cálculos largos. Sus logaritmos no son idénticos al logaritmo natural que se enseña hoy. La conexión útil es la transformación de un problema: pasar de un producto a una suma puede facilitar el estudio de una relación, pero solo cuando se cumplen las condiciones del logaritmo. Por tanto, el capítulo distingue las identidades, su dominio y su uso en ecuaciones o modelos. Una herramienta de cálculo gana potencia cuando se entiende qué conserva y qué exige.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/

1. Tres familias y tres estructuras

La exponencial describe, en particular, una variación proporcional a un valor presente. El logaritmo transforma relaciones multiplicativas en diferencias aditivas y permite invertir la exponencial en los positivos. La trigonometría representa ángulos, proyecciones y evoluciones periódicas. Estas funciones pueden intervenir en un mismo problema, pero no obedecen a las mismas identidades ni a los mismos dominios.

Un método fiable consiste en definir el dominio antes de transformar y después identificar la estructura: producto, potencia, composición o periodicidad. Una semejanza gráfica no basta para elegir una ley. Un crecimiento exponencial no es un crecimiento lineal más rápido; una sinusoide no representa toda oscilación real;

un logaritmo no permite aplicar a las sumas las reglas que posee para los productos.

Los argumentos de las funciones también exigen una interpretación. En un modelo e^(kt), el producto kt debe ser adimensional. Si t se expresa en segundos, k tiene una unidad s^−1. En ln(q/q_0), el cociente entre dos cantidades de la misma unidad es adimensional. Escribir el logaritmo de un valor numérico supone una convención de unidad o una normalización; de lo contrario, cambiar arbitrariamente la unidad puede modificar el valor calculado.

2. Exponencial: propiedades y crecimiento

La exponencial está definida en los reales y es estrictamente positiva y estrictamente creciente. Satisface e^0 = 1, e^(a+b) = e^a e^b y e^(−a) = 1/e^a. Su derivada es ella misma; para e^(u(x)), la derivada se convierte en u'(x)e^(u(x)). Las propiedades algebraicas permiten transformar un producto o un cociente, no sumar los exponentes en una suma de exponenciales.

Así, e^a + e^b no es e^(a+b). Con a = b = 0, el primer miembro vale 2 y el segundo 1. Del mismo modo, e^(2x) = (e^x)², pero e^(x²) no es (e^x)². La posición de los paréntesis describe funciones diferentes. Un contraejemplo sencillo puede detectar una identidad dudosa antes de que se propague por todo un cálculo.

Los límites son e^x → +∞ cuando x → +∞ y e^x → 0 cuando x → −∞. La exponencial nunca es igual a cero para un real finito. Una calculadora que muestra cero para un valor muy negativo puede haber alcanzado su límite de representación; esa indicación no es una nueva propiedad matemática.

3. Resolver una ecuación exponencial mediante sustitución

Consideremos e^(2x) − 5e^x + 6 = 0. Hagamos Y = e^x, con Y > 0. La ecuación se convierte en Y² − 5Y + 6 = 0, es decir, (Y − 2)(Y − 3) = 0. Los dos candidatos 2 y 3 respetan el dominio de Y. Como la exponencial es biyectiva de los reales a los positivos, las soluciones son x = ln(2) y x = ln(3).

La sustitución no exime de considerar el dominio. Si otro polinomio proporcionara una raíz Y negativa, esta no correspondería a ningún e^x real. Primero se resuelve la ecuación algebraica, después se filtra y se vuelve a la variable inicial. Estas etapas deben aparecer en la redacción para mostrar que se han conservado todas las soluciones y solamente ellas.

Para la desigualdad e^(2x) − 5e^x + 6 ≤ 0, la tabla de signos del polinomio da 2 ≤ Y ≤ 3. El crecimiento del logaritmo permite concluir ln(2) ≤ x ≤ ln(3). Una ecuación proporciona puntos; una desigualdad proporciona aquí un intervalo. Reutilizar solamente las dos raíces como conjunto solución de la desigualdad sería insuficiente.

4. Logaritmo: función inversa y reglas exactas

El logaritmo natural está definido en los reales estrictamente positivos. Es la función inversa de la exponencial: ln(e^x) = x para todo real x y e^(ln y) = y para y > 0. Es estrictamente creciente y su derivada vale 1/x. Su valor en 1 es cero; es negativo entre cero y uno y positivo por encima de uno.

Para a > 0 y b > 0, ln(ab) = ln(a) + ln(b). Se puede justificar aplicando la exponencial a la suma: e^(ln a + ln b) = ab, y después utilizando la unicidad de la preimagen por la exponencial. También se obtiene ln(a/b) = ln(a) − ln(b). Para una potencia entera de una base positiva, la regla se deduce por repetición;

para una potencia real definida mediante a^r = e^(r ln a), da ln(a^r) = r ln(a).

Los dominios no se simplifican automáticamente con la fórmula. Para $x \neq 0$, $\ln(x^2) = 2\ln(|x|)$, porque $|x|$ es positivo. Escribir $2\ln(x)$ excluiría los valores negativos de x, aunque x^2 sea positivo. Para $\ln(x) + \ln(y)$, ambos argumentos deben ser positivos; el mero hecho de que $xy > 0$ no basta si x e y son ambos negativos.

5. Ecuaciones logarítmicas y comprobación

Resolvamos $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(8)$. El dominio exige $x - 1 > 0$ y $x + 1 > 0$, por lo que $x > 1$. En ese dominio, la suma se convierte en $\ln(x^2 - 1)$. La inyectividad del logaritmo da $x^2 - 1 = 8$, es decir, $x^2 = 9$. Los candidatos son 3 y -3, pero solo 3 respeta el dominio inicial.

Para $\ln(x - 1) + \ln(x + 1) \leq \ln(8)$, el crecimiento del logaritmo da $x^2 - 1 \leq 8$ en $x > 1$. El conjunto solución es $]1 ; 3]$. No es $[-3 ; 3]$, porque los argumentos iniciales deben seguir siendo positivos. El dominio es una restricción que se mantiene durante todas las transformaciones, no una comprobación facultativa al final del cálculo.

Una ecuación $\ln(u(x)) = 0$ equivale a $u(x) = 1$ si el logaritmo está definido. Una ecuación $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$ exige $u > 0$ y $v > 0$ antes de concluir $u = v$. Resolver solamente $u = v$ puede introducir puntos en los que ambas expresiones sean negativas. Por tanto, la cadena de resolución debe conservar las condiciones de positividad.

6. Crecimiento multiplicativo y umbral entero

Una evolución ficticia que aumenta un 5 % en cada etapa sigue q_n = q_0(1,05)^n si el modelo y el porcentaje se mantienen constantes. Para buscar el primer índice donde q_n ≥ 2q_0 con q_0 > 0, se obtiene (1,05)^n ≥ 2, y después n ≥ ln(2)/ln(1,05), es decir, aproximadamente 14,21. El primer entero admisible es 15.

La comprobación da (1,05)^14 ≈ 1,980 y (1,05)^15 ≈ 2,079. El índice 14 no basta; 15 sí basta. Las dos comparaciones demuestran la minimalidad en el modelo. Este razonamiento sigue siendo puramente matemático: no prevé ningún rendimiento, población o capacidad real sin validar la regla de evolución.

Para un decrecimiento con un factor entre cero y uno, el logaritmo del factor es negativo y la división invierte el sentido de una desigualdad. Este es el punto crítico de muchos umbrales. Una manera de comprobar la respuesta consiste en probar los dos índices vecinos en la expresión inicial, en lugar de confiar en una cadena de signos copiada demasiado deprisa.

7. Logaritmos de distinta base

Para una base a > 0, a ≠ 1, el logaritmo de base a es log_a(x) = ln(x)/ln(a), para x > 0. Es creciente si a > 1 y decreciente si 0 < a < 1. El logaritmo decimal corresponde a a = 10. El cambio de base permite utilizar una calculadora que disponga únicamente de ln o de logaritmo decimal.

Un cociente multiplicado por 100 aumenta su logaritmo decimal en 2. Esta estructura explica el interés de una escala logarítmica para comparar órdenes de magnitud. Si un nivel se define mediante 10log_10(I/I_0), multiplicar I por 100 añade 20 al nivel, con la misma referencia I_0. Esto no significa que la magnitud física se haya multiplicado por 20.

Una diferencia de logaritmos corresponde al logaritmo de un cociente. Por tanto, una suma de niveles logarítmicos no representa automáticamente una suma de magnitudes físicas. Para sumar intensidades, hay que volver a las intensidades y después aplicar la definición del nivel. Interpretar la escala es tan importante como utilizar las teclas de cálculo.

8. Ángulos y circunferencia trigonométrica

El radián mide un ángulo mediante el cociente entre la longitud de un arco y el radio de la circunferencia. Una vuelta completa corresponde a 2π radianes, es decir, 360°. Media vuelta vale π radianes y un ángulo recto π/2. Las derivadas usuales de sin y cos utilizan argumentos expresados en radianes. Por tanto, una calculadora configurada en grados puede proporcionar valores incoherentes con una fórmula si se olvida esta convención.

En la circunferencia unidad, un punto asociado a un ángulo x tiene como coordenadas (cos x ; sin x). La identidad $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ procede de su pertenencia a la circunferencia. El coseno es par, el seno impar y ambos son periódicos de periodo 2π. Un valor trigonométrico no permite identificar un ángulo único sin un intervalo u otra información.

Las fórmulas de adición relacionan ángulos: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ y $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. Para $a = b = x$, se recuperan $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ y $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Estas identidades pueden transformar una expresión; no deben confundirse con $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$, que es falsa.

9. Resolver una ecuación trigonométrica

La ecuación cos x = 1/2 tiene como soluciones x = π/3 + 2kπ o x = −π/3 + 2kπ, con k entero. En [0 ; 2π], esto da π/3 y 5π/3. La circunferencia explica las dos familias mediante simetría. Escribir solamente π/3 olvidaría parte de las soluciones; escribir una familia infinita sin filtrar el intervalo olvidaría la pregunta planteada.

Para sin x = −sqrt(2)/2 en [0 ; 2π], las soluciones son 5π/4 y 7π/4. El seno corresponde a la ordenada, por lo que los puntos están en la mitad inferior de la circunferencia. Conocer los ángulos de referencia y los signos por cuadrante permite reconstruir los valores, en lugar de memorizar una lista sin estructura.

La periodicidad exige cuidado con los extremos. Si la ecuación admite x = 0 y el dominio es [0 ; 2π], el valor 2π también puede ser una solución distinta como número, aunque represente el mismo punto de la circunferencia. En [0 ; 2π[, queda excluido. Por tanto, la notación del intervalo debe conservarse hasta la respuesta final.

10. Derivadas y periodicidad de una composición

Las derivadas usuales son (sin x)' = cos x y (cos x)' = −sin x. Para f(x) = cos(3x), f' = −3sin(3x). Su periodo es 2π/3, porque aumentar x en esa cantidad aumenta el argumento en 2π. La frecuencia de una función cos(ωt) corresponde a |ω|/(2π) cuando t es un tiempo y ω una frecuencia angular en radianes por unidad de tiempo.

La función $\sin^2 x$ tiene un periodo π, aunque sin x tenga un periodo 2π: cambiar el signo del seno no cambia su cuadrado. Por tanto, una transformación puede modificar el periodo mínimo. Todo periodo de una función no es necesariamente su menor periodo positivo. Hay que distinguir un valor que funciona de la característica fundamental buscada.

Para sin x + cos x, una identidad da sqrt(2)sin(x + π/4). Esta escritura revela una amplitud sqrt(2), un periodo 2π y un desplazamiento de fase. Así, la suma de dos sinusoides de igual frecuencia puede seguir siendo una sinusoide con otra amplitud y fase. Con frecuencias diferentes, una reducción tan sencilla no es general.

11. Aproximaciones locales y controles

Cerca de cero, la derivabilidad da e^h ≈ 1 + h, ln(1 + h) ≈ h y sin h ≈ h, para los dominios y las convenciones adecuados. Estas aproximaciones son locales. Para sin h, h debe estar en radianes. No se convierten en igualdades porque un ejercicio diga «pequeño»; la precisión requerida debe discutirse si se utiliza un valor numérico.

La convexidad proporciona información sobre el signo de algunas diferencias. Se sabe e^h ≥ 1 + h, y la concavidad del logaritmo da ln(1 + h) ≤ h para h > −1. Así, las aproximaciones son respectivamente una cota inferior y una cota superior en esos dominios. Esto no basta para conocer el tamaño del error; puede ser necesaria una acotación más ajustada o un estudio del resto.

Para comprobar un cálculo, examine valores de referencia: e^0 = 1, ln 1 = 0, sin 0 = 0, cos 0 = 1. Compruebe los signos, el dominio y la periodicidad. Una transformación que modifica una de estas propiedades conocidas debe reexaminarse. Esta estrategia detecta errores antes de un cálculo más largo sin pretender sustituir a una demostración.

12. Ejercicios resueltos y repaso

A - Exponencial. Resolver e^(2x) = 7. **Solución:** 2x = ln 7, por lo que x = (ln 7)/2. Resolver e^x = 7 y después olvidar el factor 2 daría otro valor. La positividad de 7 hace posible la transformación.

B - Dominio logarítmico. Resolver $\ln(3 - x) \geq 0$. **Solución:** el dominio es $x < 3$. El logaritmo es positivo o nulo para un argumento al menos igual a 1, por lo que $3 - x \geq 1$, es decir, $x \leq 2$. El conjunto solución es $]-\infty\ ;\ 2]$, ya incluido en el dominio.

C - Identidad. Simplificar $\ln(5x) - \ln(x)$ para $x > 0$. **Solución:** $\ln(5x/x) = \ln 5$. Si se tuviera un x negativo, las expresiones iniciales no estarían definidas en los reales. El resultado constante no amplía automáticamente el dominio.

D - Trigonometría. Resolver $\sin(2x) = 0$ en $[0\ ;\ \pi]$. **Solución:** $2x = k\pi$, por lo que $x = k\pi/2$. El filtrado da 0, $\pi/2$ y π. El intervalo del argumento es $[0\ ;\ 2\pi]$, y ambos extremos están incluidos.

E - Derivación. Derivar $\ln(1 + e^x)$. **Solución:** el argumento es positivo en todos los reales y la derivada vale $e^x/(1 + e^x)$. Está comprendida entre cero y uno, lo que proporciona un control de signo y de tamaño.

F - Periodo. Dar un periodo fundamental de $\cos(4t)$. **Solución:** $2\pi/4 = \pi/2$. El valor 2π también es un periodo, pero no es el menor periodo positivo. No confunda argumento, frecuencia angular y frecuencia.

Repase reconstruyendo los dominios, las identidades y las transformaciones en lugar de memorizar ecuaciones aisladas. Para cada solución, indique si es exacta, aproximada, única o procede de una familia periódica. Marco de progresión: programa publicado de Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Redacción y ejercicios originales LFDP; ninguna previsión real ni reproducción de ejercicios de terceros.

Capítulo 8 - Primitivas e integrales: medir una acumulación y controlar una aproximación

Referencia histórica - Cavalieri: pensar el área antes del cálculo integral moderno

En 1635 aparece la Geometria de Bonaventura Cavalieri, que expone su método de los indivisibles. Constituye un hito histórico en el estudio de las áreas y los volúmenes. En nuestro capítulo, dividir y sumar ayuda a entender la integral, pero su definición y sus justificaciones modernas no se reducen a ese método antiguo. La conexión pedagógica es el paso de una figura global a contribuciones comparables y después a un resultado controlado. Esta referencia no atribuye únicamente a Cavalieri la invención de la integración ni confunde intuición geométrica con demostración actual.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/

1. Una cantidad acumulada, no un valor instantáneo

Una potencia proporciona una energía por unidad de tiempo; la energía recibida durante un tiempo depende de toda la evolución de esa potencia. Una velocidad proporciona un desplazamiento por unidad de tiempo; el desplazamiento depende de su variación durante el trayecto. Una integral permite calcular esta acumulación. Por tanto, no sustituye la función inicial por una «media» sin precisar cómo se define esa media.

Para una función continua positiva en [a ; b], la integral puede introducirse mediante el área bajo su curva entre los dos extremos. Rectángulos cada vez más estrechos aproximan esa

área. Para una función de cualquier signo, la integral se vuelve algebraica: las contribuciones situadas debajo del eje son negativas. El área geométrica total y la integral pueden entonces diferir.

La unidad de la integral es la de la función multiplicada por la de la variable. Una potencia en vatios integrada respecto de segundos da julios; una velocidad en m/s integrada respecto de segundos da metros. Si los ejes son números sin unidad, se habla de unidades de área para una interpretación geométrica. Esta comprobación conecta el cálculo con la pregunta realmente planteada.

2. Primitivas: una familia de funciones

Una primitiva F de f en un intervalo I es una función derivable tal que F' = f en I. Si F es una primitiva, F + C también lo es para toda constante C. Recíprocamente, dos primitivas de una misma función en un intervalo difieren en una constante. La mención «intervalo» importa: en un dominio compuesto por partes separadas, las constantes pueden ser distintas en cada parte.

Para f(x) = 2x, F(x) = x² es una primitiva. Para f(x) = e^(3x), sirve F(x) = e^(3x)/3. Para f(x) = cos(4x), F(x) = sin(4x)/4. Se comprueba cada propuesta mediante derivación. El factor interior debe compensarse; escribir e^(3x) como primitiva de e^(3x) olvidaría el factor 3 de su derivada.

Una condición adicional fija la constante. Si F' = 2x y F(1) = 5, entonces F(x) = x² + C y 1 + C = 5, por lo que C = 4. La condición inicial transforma una familia en una función determinada. Esta idea se reutilizará en las ecuaciones diferenciales: integrar da una familia y los datos permiten elegir un miembro.

3. Teorema fundamental y cálculo mediante una primitiva

Para una función continua f en un intervalo que contiene a y b, cualquier primitiva F permite calcular $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Añadir una constante a F no cambia esta diferencia. El valor en el extremo inferior se resta después de evaluar la primitiva; un paréntesis incorrecto puede invertir el resultado.

La función $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es una primitiva de f cuando se respetan las hipótesis de continuidad. La variable t bajo el signo integral es una variable de integración; x representa aquí el extremo variable. Esta distinción evita escribir una misma letra en varios papeles sin saber qué varía. Así, la integral conecta área acumulada y derivación.

Para $f(x) = 3x^2 - 2$ en [1 ; 2], una primitiva es $F(x) = x^3 - 2x$. La integral vale $(8 - 4) - (1 - 2) = 5$. La función es positiva en ese intervalo, lo que hace coherente un resultado positivo. La comprobación del signo es independiente del cálculo de los paréntesis y puede revelar un error antes de la respuesta final.

4. Área algebraica y área geométrica

Tomemos $f(x) = x - 1$ en [0 ; 3]. Una primitiva es $x^2/2 - x$. La integral vale 3/2. Sin embargo, la región entre la curva y el eje incluye una parte negativa entre 0 y 1 y una parte positiva entre 1 y 3. El área geométrica total es la suma de las dos áreas positivas: 1/2 + 2 = 5/2.

Para calcular esta área, se integra |f| o se divide el dominio en los cambios de signo. La fórmula ∫f da la diferencia entre contribuciones positivas y negativas. Por tanto, una integral nula no implica una función nula: las contribuciones pueden compensarse. Por ejemplo, $\int_{-1}^1 x\,dx = 0$ aunque la gráfica presente dos regiones no nulas.

Para el área entre dos curvas f y g, se integra |f − g|. Si se sabe que f ≥ g en el intervalo, el área es ∫(f − g). Las intersecciones pueden imponer varias partes. Elegir la curva «de arriba» a partir de un único punto sin estudiar el signo puede producir un área negativa o una compensación involuntaria.

5. Propiedades de la integral

La linealidad da ∫(αf + βg) = α∫f + β∫g, para los mismos extremos y las hipótesis adecuadas. La relación de Chasles permite dividir: ∫_a^b f + ∫_b^c f = ∫_a^c f. Invertir los extremos cambia el signo y la integral entre dos extremos iguales es nula. Estas reglas organizan un cálculo sin exigir una nueva primitiva en cada parte.

Si f ≥ 0 en [a ; b] con a ≤ b, su integral es positiva o nula. Si f ≤ g, entonces ∫f ≤ ∫g. Por tanto, una desigualdad punto a punto puede acotar una acumulación. El orden de los extremos importa: los signos se invierten si se pasa de una orientación a la otra. Las propiedades deben utilizarse con sus convenciones.

Si m ≤ f(x) ≤ M en [a ; b], entonces m(b − a) ≤ ∫_a^b f ≤ M(b − a). Esta cota no siempre proporciona gran precisión, pero permite una comprobación inmediata. Un valor calculado fuera de esta acotación es incompatible con los datos o con el cálculo. Para una función comprendida entre 2 y 5 en un intervalo de longitud 3, la integral debe estar comprendida entre 6 y 15.

6. Reconocer una derivada compuesta en sentido inverso

El cálculo de primitivas mejora al reconocer una estructura. Si u es derivable, una primitiva de u'e^u es e^u. Para u > 0, una primitiva de u'/u es ln(u). Una primitiva de u'cos(u) es sin(u). El factor u' es determinante; la mera presencia de una exponencial, un cociente o un coseno no basta.

Para f(x) = 2x/(x² + 1), se reconoce u = x² + 1, siempre positiva, y u' = 2x. Una primitiva es ln(x² + 1). Para g(x) = 6x e^(3x²), una primitiva es e^(3x²). Si el numerador del primer ejemplo fuera x, habría que añadir un factor 1/2. Una comprobación mediante derivación permite recuperar el coeficiente exacto.

No se debe inventar una primitiva «integrando por separado» el numerador y el denominador de un cociente. Del mismo modo, una primitiva de un producto no es el producto de dos primitivas. Las reglas de derivación explican por qué estos atajos serían falsos. Cuando no sirve ninguna estructura inmediata, puede ser necesario otro método o una aproximación.

7. Integración por partes: utilizar la derivada de un producto

La fórmula (uv)' = u'v + uv' da, después de integrar, ∫_a^b u'v = [uv]_a^b − ∫_a^b uv'. Esta relación de integración por partes transforma una integral en otra. Su interés depende de la elección: se busca una derivada que simplifique un factor y una primitiva accesible para el otro. No existe una elección automáticamente eficaz para todo producto.

Para ∫_0^1 xe^x dx, tomemos v = x y u' = e^x, por lo que u = e^x y v' = 1. La integral vale [xe^x]_0^1 − ∫_0^1 e^x dx = e − (e − 1) = 1. Una primitiva equivalente es (x − 1)e^x, que se puede comprobar mediante derivación. El resultado positivo es coherente con el integrando positivo en el intervalo.

Para ∫_1^e ln(x) dx, se puede tomar v = ln(x) y u' = 1, por lo que u = x y v' = 1/x. Se obtiene [xln(x)]_1^e − ∫_1^e 1 dx = e − (e − 1) = 1. Escribir una primitiva xln(x) sin el término −x habría olvidado parte de su derivada. El método se entiende gracias al producto, no gracias a una receta de selección memorizada sin justificación.

8. Valor medio de una función

El valor medio de f en [a ; b], con a < b, es μ = [1/(b − a)]∫_a^b f(x) dx. Tiene la misma unidad que f. Corresponde a la altura de un rectángulo de la misma anchura y de la misma área algebraica que la integral. La media de algunos valores muestreados no es automáticamente ese valor; depende del muestreo y de la aproximación utilizada.

Para f(x) = x² en [0 ; 2], la integral vale 8/3 y la media 4/3. La media de los valores únicamente en los extremos, (0 + 4)/2 = 2, es diferente. Si f es continua, su valor medio se alcanza en al menos un punto del intervalo; aquí sirve x = 2/sqrt(3). Esta propiedad no siempre proporciona un punto único.

En un modelo de potencia P(t) = 3t + 2 en [0 ; 4] segundos, con las unidades de los coeficientes adecuadas, la energía vale ∫P dt = 32 J y la potencia media 8 W. Para esta función afín, la media de los valores inicial y final también da 8 W. La igualdad resulta de la estructura afín; no debe generalizarse a cualquier curva.

9. Rectángulos y acotación numérica

Dividamos [0 ; 1] en cuatro intervalos de anchura 1/4 para f(x) = x², creciente. Los rectángulos que utilizan los valores por la izquierda dan una cota inferior del área; los que utilizan los valores por la derecha, una cota superior. La suma izquierda es (1/4)[0² + (1/4)² + (1/2)² + (3/4)²] = 0,21875. La suma derecha vale 0,46875. La integral exacta 1/3 se encuentra entre ambas.

Al aumentar el número de subdivisiones, estas acotaciones se estrechan para una función continua en este marco. Un método numérico debe indicar el número y la anchura de los intervalos, así como la elección de los puntos. Una lista de resultados sin método no permite valorar la precisión. Si la función no es monótona, la elección izquierda o derecha no garantiza por sí sola una cota; hay

que estudiar los extremos en cada parte o emplear otros argumentos.

El método de los trapecios utiliza los segmentos que unen los valores en los extremos. Para este ejemplo convexo, sobreestima el área y da 0,34375 con cuatro partes. El método de los puntos medios da 0,328125, una subestimación en este caso. La posición de las cuerdas y la convexidad explican el sentido de estas diferencias. Sin esta información, estos métodos proporcionan aproximaciones, pero no necesariamente cotas certificadas.

10. Una sucesión de integrales y una relación de recurrencia

Definamos $I_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$ para $n \geq 0$. Los integrandos son positivos, por lo que $I_n > 0$. Como $0 \leq x \leq 1$, $x^{n+1} \leq x^n$, por lo que $I_{n+1} \leq I_n$. La sucesión es decreciente y está acotada inferiormente por cero; converge. Para identificar su límite, se puede utilizar $e^x \leq e$: $I_n \leq e\int_0^1 x^n \, dx = e/(n + 1)$, que tiende hacia cero. Por tanto, la acotación da $I_n \to 0$.

Una integración por partes para $n \geq 1$ da $I_n = [x^n e^x]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x \, dx = e - nI_{n-1}$. El primer término es $I_0 = e - 1$; se recupera $I_1 = 1$. El caso $n = 0$ debe tratarse por separado, porque la escritura del término de borde en cero y la potencia $n - 1$ cambian de condición.

Esta relación es exacta, pero puede ser delicada numéricamente para valores grandes de n, porque resta cantidades próximas y amplifica ciertos errores de redondeo. Una fórmula de recurrencia correcta no es automáticamente el mejor algoritmo en coma flotante. Las cotas teóricas constituyen aquí un control valioso: un resultado negativo sería imposible para estas integrales positivas.

11. Ejercicios resueltos

A - Primitiva y extremos. Calcular $\int_0^2 (4x + 1)\,dx$. **Solución:** una primitiva es $2x^2 + x$, por lo que la integral vale 10. La función es positiva en ese intervalo; un resultado negativo señalaría un error de signo o de extremos de integración.

B - Área entre curvas. Comparar x y x^2 en [0 ; 1] y después calcular el área entre sus gráficas. **Solución:** $x - x^2 = x(1 - x) \geq 0$. El área vale $\int_0^1 (x - x^2)\,dx = 1/2 - 1/3 = 1/6$. El orden de las dos funciones se establece antes de integrar.

C - Producto. Calcular $\int_0^1 xe^{2x}\,dx$. **Solución:** una integración por partes da $[xe^{2x}/2]_0^1 - (1/2)\int_0^1 e^{2x}\,dx = e^2/2 - (e^2 - 1)/4 = (e^2 + 1)/4$. El factor 1/2 interviene dos veces y debe conservarse.

D - Desplazamiento. Una velocidad es $v(t) = 2 - t$ en [0 ; 4]. **Solución:** su integral vale $[2t - t^2/2]_0^4 = 0$. La distancia no es nula: vale $2 + 2 = 4$ en la unidad de longitud, al separar las fases antes y después de $t = 2$. La integral de la velocidad algebraica da un desplazamiento.

E - Acotación. Una función satisface $1 \leq f \leq 3$ en [2 ; 5]. **Solución:** $3 \leq \int_2^5 f \leq 9$ y su valor medio está comprendido entre 1 y 3. Esta acotación no determina un valor único; fija lo que es compatible con las únicas cotas dadas.

12. Repaso y referencias

Repase una integral mediante su significado, sus unidades, su signo y su método de cálculo. Compruebe una primitiva mediante derivación. Para un área geométrica, examine los cambios de signo; para una aproximación, indique las hipótesis que la convierten en una cota o solamente en una estimación. Conserve las constantes y los factores de la composición hasta la comprobación final.

El marco oficial publicado de Terminale incluye primitivas, integrales, valor medio e integración por partes: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Las demostraciones, situaciones y ejercicios de este capítulo son originales LFDP. No se reproduce ningún texto de programa o manual ni ejercicio de examen de terceros.

Capítulo 9 - Ecuaciones diferenciales: relacionar una evolución con su velocidad de cambio

Referencia histórica - Euler: buscar funciones a partir de relaciones

Euler publica su tratado de cálculo integral en tres volúmenes entre 1768 y 1770; en él estudia también ecuaciones diferenciales. Este hito recuerda que la incógnita puede ser una función completa, no un número aislado. En este capítulo, una relación entre una función y su derivada se acompaña de una condición inicial y después se confronta con una interpretación y una aproximación numérica. El archivo institucional fecha el primer volumen en 1768; el archivo que ofrece es una tercera edición de 1824, distinción que debe conservarse al consultar el documento histórico.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/ ; University of the Pacific - Euler Archive: https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/342/

1. Una ecuación cuya incógnita es una función

Una ecuación diferencial relaciona una función desconocida con una o varias de sus derivadas. Resolver $y' = 2y$ no consiste en encontrar un único número y: se buscan todas las funciones derivables que satisfacen esa relación en un intervalo. Una condición inicial, como $y(0) = 3$, selecciona después una solución dentro de una familia. La distinción entre relación de evolución y estado inicial es tan importante como para las sucesiones.

Hay que nombrar las variables. Si t representa un tiempo, y(t) puede representar una temperatura, una concentración ficticia o

una magnitud abstracta. El coeficiente que multiplica a y en y' = ay tiene una unidad inversa del tiempo si y conserva la misma unidad. Un término b en y' = ay + b tiene la unidad de y por unidad de tiempo. Una ecuación puede ser algebraicamente correcta y físicamente incoherente si las unidades no corresponden.

El capítulo trata principalmente las ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes. Algunos complementos muestran por qué este modelo no cubre todas las evoluciones. Las situaciones se construyen para aprender; no predicen ningún rendimiento, evolución de la salud o fenómeno real sin validar las hipótesis y los parámetros.

2. Resolver y' = ay y justificar toda la familia

La función y(t) = Ce^(at) satisface y' = aCe^(at) = ay para toda constante C. Para mostrar que todas las soluciones tienen esta forma, tomemos una solución y y definamos z(t) = y(t)e^(−at). Por la regla del producto, z' = y'e^(−at) − aye^(−at) = 0. Por tanto, en un intervalo, z es constante y y = Ce^(at). Esta demostración establece la familia completa, no solamente algunos ejemplos de soluciones.

Si y(t_0) = y_0, entonces C = y_0e^(−at_0), de donde y(t) = y_0e^[a(t − t_0)]. La forma con t − t_0 conserva claramente el origen de la condición inicial. Para a = 0, se recuperan las soluciones constantes. Para y_0 = 0, la solución es idénticamente nula cualquiera que sea a. El signo de y_0 se conserva, puesto que la exponencial es positiva.

Si a > 0 y y_0 > 0, la función aumenta y diverge a largo plazo en el modelo. Si a < 0 y y_0 > 0, decrece hacia cero. Un valor negativo de a significa un decrecimiento relativo proporcional al valor

presente, no una disminución fija en cada unidad de tiempo. Esta última se describiría mediante y' = b con b constante.

3. Un término constante y un valor de equilibrio

Para y' = ay + b con a ≠ 0, busquemos una solución constante L. Debe satisfacer 0 = aL + b, por lo que L = −b/a. Haciendo z = y − L, se obtiene z' = az. Así, las soluciones son y(t) = L + Ce^(at). El cambio de variable mide la diferencia respecto del equilibrio y transforma la ecuación en un caso ya resuelto.

Con y(t_0) = y_0, la solución se convierte en y(t) = L + (y_0 − L)e^[a(t − t_0)]. Se comprueba la condición inicial y después la ecuación mediante derivación. Si a < 0, la diferencia respecto de L tiende hacia cero. Una solución puede subir hacia L o bajar hacia L según el signo de y_0 − L. El mismo modelo no fija una dirección de variación independientemente del estado inicial.

Si a > 0, una diferencia inicial no nula crece en valor absoluto; sin embargo, la solución constante y = L sigue existiendo. Por tanto, sería falso afirmar que todas las soluciones divergen para a > 0. Para a = 0, la transformación anterior no está permitida; la ecuación es y' = b y sus soluciones son y(t) = bt + C. Separar este caso evita una división entre cero.

4. Una ecuación con una condición en otro instante

Resolvamos y' + 3y = 9 con y(1) = 4. La ecuación equivale a y' = −3y + 9, por lo que L = 3 y y(t) = 3 + Ce^(−3t). La condición da 4 = 3 + Ce^−3, es decir, C = e³. Se puede escribir de forma más legible y(t) = 3 + e^[−3(t − 1)]. En t = 1, el factor exponencial vale uno y el valor es efectivamente cuatro.

La ecuación y la condición no exigen necesariamente un origen en t = 0. Un error clásico consiste en tomar C = 4 porque se ha memorizado el caso y(0) = y_0 para y' = ay. Aquí el término de

equilibrio y el instante inicial modifican la constante. La comprobación en el punto dado es breve y detecta inmediatamente este error.

La solución permanece por encima de 3 y decrece para $t \geq 1$. Su límite vale 3. El límite se deduce del signo del coeficiente del exponente, no del mero hecho de que la ecuación tenga una solución constante. Para una ecuación con $a > 0$, el valor constante sería generalmente inestable frente a una diferencia inicial. La existencia de equilibrio y la atracción hacia el equilibrio son dos propiedades diferentes.

5. Enfriamiento: construir el modelo a partir de un balance

Un objeto ficticio de capacidad térmica C intercambia con un medio mantenido a T_ext. Una ley de potencia recibida $-H(T - T_{ext})$, con $H > 0$ constante, conduce a $C\,T' = -H(T - T_{ext})$. La ecuación se escribe $T' = -(1/\tau)(T - T_{ext})$, donde $\tau = C/H$ es un tiempo característico. La solución es $T = T_{ext} + (T_0 - T_{ext})e^{(-t/\tau)}$ si el estado inicial se da en cero.

Para $T_0 = 70$ °C, $T_{ext} = 10$ °C y $\tau = 4$ min, se obtiene $T(t) = 10 + 60e^{(-t/4)}$, con t en minutos. El modelo se acerca a 10 °C, no a cero. Para alcanzar como máximo 25 °C, la diferencia debe ser como máximo 15: $e^{(-t/4)} \leq 1/4$, por lo que $t \geq 4\ln(4) \approx 5{,}55$ min. El logaritmo se aplica a un cociente adimensional.

Este cálculo no proporciona un protocolo de contacto con un objeto caliente. El entorno real puede variar, el objeto puede no tener una temperatura uniforme y el coeficiente H puede depender de las condiciones. El modelo es útil cuando estas aproximaciones son aceptables para la pregunta. La ecuación no se convierte en una validación física porque su solución sea matemáticamente exacta.

6. Entrada, salida y conservación en un depósito ficticio

Un depósito ideal de volumen constante V recibe y evacua el mismo caudal volumétrico Q. Se supone una mezcla instantáneamente homogénea y una concentración entrante c_in constante. Si M = Vc es la cantidad de sustancia presente, el balance es M' = Qc_in − Qc. Con V constante, esto da c' = (Q/V)(c_in − c). La relación resulta de los dos flujos, no de una preferencia por una exponencial.

La concentración de equilibrio es c_in y el tiempo característico V/Q. Para V = 100 litros y Q = 5 litros por minuto, este tiempo vale 20 min. Si la concentración inicial es 3 g/L y la de entrada 1 g/L, la solución es c(t) = 1 + 2e^(−t/20). Después de 20 min, vale aproximadamente 1,736 g/L. El volumen total permanece constante en este modelo, pero la cantidad de sustancia varía.

Si la entrada no contiene esa sustancia, c_in = 0 y c decrece exponencialmente. Para c_0 = 5 g/L, la cantidad inicial en 100 litros vale 500 g; después de una constante de tiempo, vale aproximadamente 184 g. Son valores de un ejercicio, no dosificaciones, tratamientos ni recomendaciones de uso de un fluido. Una mezcla no homogénea o un volumen variable exigirían otra ecuación.

7. Modelos lineal, exponencial y saturante

Un crecimiento constante y' = b da una evolución afín. Un crecimiento proporcional y' = ry da una exponencial. Ambos pueden ser próximos en un intervalo corto y muy diferentes a largo plazo. Elegir entre ellos exige hipótesis y observaciones. Ajustar dos puntos no siempre permite decidir qué regla seguirá siendo pertinente después de esos puntos.

Como complemento, una ecuación no lineal y' = ry(1 − y/K), con r > 0 y K > 0, modeliza un crecimiento que se reduce al acercarse a

una capacidad K. Para 0 < y_0 < K, una solución es y(t) = K/[1 + A e^(−rt)], con A = K/y_0 − 1. Se puede comprobar mediante derivación. Las soluciones constantes cero y K deben examinarse por separado; la fórmula de A no está definida para y_0 = 0.

Este complemento no es un modelo universal de población. El parámetro K puede ser artificial o variable en una situación real y otros efectos pueden dominar. Sirve para mostrar que una exponencial sin límite no es la única estructura matemática posible. La competencia entre modelos se valora por sus hipótesis y predicciones, no por el aspecto más tranquilizador de una curva.

8. Método de Euler: una aproximación discreta

Para y' = f(t,y), el método de Euler explícito utiliza y_(n+1) = y_n + h f(t_n,y_n), con t_(n+1) = t_n + h. Sustituye una evolución en un pequeño intervalo por la variación local dada al principio. El paso h debe tener la unidad del tiempo. Los valores calculados aproximan la solución; en general, no son los valores exactos en los mismos instantes.

Para y' = −ky con k > 0, Euler da y_(n+1) = (1 − kh)y_n. La solución exacta en un paso multiplica y por e^(−kh), siempre positivo. Si 0 < kh ≤ 1, el factor de Euler permanece positivo o nulo y produce un decrecimiento para un estado inicial positivo. Si 1 < kh < 2, los valores alternan de signo mientras disminuyen en valor absoluto. Si kh > 2, pueden crecer en valor absoluto aunque la solución continua decrezca.

Con k = 1 y h = 3 en unidades compatibles, el factor numérico vale −2: el método diverge para y_0 ≠ 0. Este fallo no refuta la solución exacta e^−t; muestra un paso inadecuado y una limitación del algoritmo. Disminuir el paso puede mejorar una aproximación, pero todavía hay que examinar regularidad, duración y errores

acumulados. Un programa ejecutado sin errores informáticos no es necesariamente una simulación matemáticamente fiable.

9. Identificar un parámetro y comprobar de forma independiente

Si se conoce el equilibrio L y se supone que las observaciones siguen y(t) = L + Ce^(at), dos valores cuyas diferencias respecto de L sean no nulas y del mismo signo permiten estimar a mediante ln[(y(t_2) − L)/(y(t_1) − L)]/(t_2 − t_1). Son necesarios un cociente positivo y dos instantes distintos. El coeficiente estimado depende del modelo indicado.

Para datos ficticios L = 2, y(0) = 10 y y(4) = 6, el cociente de las diferencias vale 4/8 = 1/2, por lo que a = −ln(2)/4. El modelo predice después y(8) = 4. Una medida independiente en ese instante podría comprobar la predicción. Recuperar los dos valores utilizados para ajustar el modelo no es una prueba independiente: es una comprobación de la construcción.

Si L también es desconocido, dos observaciones no determinan necesariamente los tres parámetros L, C y a. Las incertidumbres y el intervalo de observación también pueden hacer frágil una estimación. La solución de una ecuación diferencial, el ajuste de sus parámetros y la validación del modelo son tres etapas distintas. Una bonita curva calculada no sustituye a ninguna de ellas.

10. Una introducción al segundo orden

Una ecuación y'' + ω²y = 0, con ω > 0, interviene en un oscilador ideal. Las funciones A cos(ωt) + B sin(ωt) la satisfacen mediante dos derivaciones. Con y(0) = y_0 y y'(0) = v_0, se obtiene A = y_0 y B = v_0/ω. Se necesitan dos condiciones para determinar estas dos constantes. Este complemento aclara la conexión entre trigonometría y evolución dinámica.

El periodo vale 2π/ω. El modelo no contiene disipación ni una fuerza mantenida; por tanto, una oscilación real puede exigir otros términos. No hay que resolver esta ecuación como y' = ay: el orden y el tipo de relación son diferentes. Identificar la ecuación precede a la elección del método.

El capítulo principal sigue centrado en el primer orden lineal con coeficientes constantes. El oscilador y el crecimiento saturante son ampliaciones explícitamente diferenciadas, útiles para entender los límites de una familia de modelos. No se presentan como un anuncio de ejercicios o exigencias de una convocatoria de examen.

11. Ejercicios resueltos

A - Familia completa. Resolver y' = −2y e imponer y(0) = 5. **Solución:** las soluciones son Ce^(−2t); la condición da C = 5. La solución es positiva y decrece hacia cero. Comprobar la derivada y el valor inicial basta para controlar la función obtenida, mientras que la demostración de la familia garantiza que no se ha olvidado ninguna otra solución en este marco.

B - Equilibrio. y' = 2y − 6, y(0) = 4. **Solución:** L = 3 y y(t) = 3 + e^(2t). El equilibrio existe, pero esta solución se aleja de él. Con y(0) = 3, sería constante; con y(0) = 2, sería 3 − e^(2t), y podría volverse negativa. Si y debiera representar una cantidad no negativa, esta última fase señalaría una limitación del modelo físico.

C - Término constante. y' = −4 e y(0) = 7. **Solución:** y(t) = 7 − 4t. No es una exponencial. El valor se vuelve cero en t = 7/4. Un dominio físico que impusiera y ≥ 0 debería detenerse o modificarse más allá de ese umbral.

D - Solución propuesta. ¿La función y = e^(2t) satisface y' = 2y + 1? **Solución:** su derivada vale 2e^(2t), mientras que el segundo miembro vale 2e^(2t) + 1. La diferencia constante muestra que la propuesta no sirve, independientemente de la condición inicial.

E - Paso numérico. Para y' = −y, y_0 = 1 y h = 0,5, calcular el primer paso de Euler y compararlo con el valor exacto. **Solución:** Euler da 0,5; la solución exacta da e^−0,5 ≈ 0,6065. La diferencia es aproximadamente 0,1065. El paso numérico describe una aproximación, no otra solución exacta de la misma ecuación.

12. Repaso y referencias

Para repasar, establezca la familia, utilice la condición inicial y después compruebe mediante derivación. Estudie el equilibrio, el signo y el límite sin deducirlos mecánicamente del mero nombre de la ecuación. Para un modelo, indique los intercambios y las unidades. Para una simulación, distinga solución exacta y aproximación, y compruebe un invariante o una cota independiente.

Marco oficial publicado de Terminale: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm y anexo https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, consultados el 11 de octubre de 2026. Desarrollos, ejemplos y ejercicios originales LFDP. Los modelos de enfriamiento y de depósito son pedagógicos y no constituyen ningún protocolo de manipulación, diagnóstico, dosificación o predicción de una situación real.

Capítulo 10 - Recuento, probabilidades y distribución binomial

Referencia histórica - Pascal: una disposición revela una estructura

La BnF registra una publicación de 1665 del Traité du triangle arithmétique de Blaise Pascal, posterior a su muerte. Esta referencia acompaña la lectura de los coeficientes binomiales: una disposición de números puede ayudar a reconocer una relación y después una demostración explica por qué se cumple. En este capítulo separamos la construcción del triángulo, el recuento y las aplicaciones probabilísticas. La asociación del triángulo con el nombre de Pascal no afirma que fuera el primero en conocer esa disposición; sitúa una obra histórica precisa en lugar de atribuir un origen único a todas las ideas del capítulo.

Fuente histórica: Bibliothèque nationale de France - Catalogue collectif de France: https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/ark:/16871/00114268519

1. Un modelo probabilístico debe comenzar por sus resultados posibles

Un cálculo de probabilidad describe un modelo de experimento, no la incertidumbre en general. Se definen el espacio de resultados posibles, los sucesos y una regla que atribuye probabilidades. En un espacio finito, las probabilidades elementales son positivas o nulas y su suma vale uno. Un suceso es un conjunto de resultados; su probabilidad es la suma de las probabilidades que se les atribuyen.

La palabra «azar» no garantiza equiprobabilidad. Una moneda puede estar desequilibrada; una extracción depende del dispositivo; una muestra puede seleccionarse con un sesgo. La

fórmula «casos favorables divididos entre casos posibles» se justifica cuando los resultados contados son equiprobables. Resulta engañosa si se cuentan categorías que agrupan cantidades diferentes de resultados.

Para dos lanzamientos de un dado equilibrado, las treinta y seis parejas ordenadas son equiprobables. Las sumas posibles van de dos a doce, pero esos once valores no son equiprobables: una sola pareja da dos, mientras que seis dan siete. Por tanto, cambiar la representación de un experimento no conserva automáticamente una distribución uniforme en las nuevas categorías.

Hay que distinguir la probabilidad teórica de la frecuencia observada. Una frecuencia es el cociente entre un número de apariciones y un número de ensayos realizados. Constituye un dato que puede variar de una serie a otra. Una probabilidad es un parámetro del modelo. Su aproximación se justificará bajo hipótesis de repetición, no mediante una identificación inmediata.

2. Contar sin repetición ni doble recuento

Si una primera decisión ofrece a posibilidades y una segunda b posibilidades para cada una de ellas, el número de parejas de elecciones es a b. Este principio supone que el número de posibilidades de la segunda etapa sea efectivamente b para cada primera decisión. Cuando ese número varía, hay que sumar las contribuciones correspondientes. Un árbol permite ver esta distinción en lugar de aplicar mecánicamente un producto.

Para formar un código de cuatro caracteres con diez elecciones posibles en cada posición y repetición permitida, se obtienen 10^4 códigos. Si los caracteres deben ser distintos, las elecciones sucesivas son diez, nueve, ocho y después siete: se obtienen 5 040 códigos. El cambio de condición transforma el recuento, aunque la longitud del código siga siendo idéntica.

El orden importa en un código o en un podio. Elegir tres personas entre cinco para ocupar sucesivamente tres puestos da $5 \times 4 \times 3 = 60$ posibilidades. Elegir un grupo de tres personas entre las mismas cinco, sin funciones distintas, solo da diez grupos. Cada grupo se ha contado $3! = 6$ veces entre las listas ordenadas, de donde $60/6 = 10$.

Para n objetos distintos, el número de permutaciones es n!. Se establece $0! = 1$, convención coherente con varias identidades. El número de subconjuntos de k elementos entre n es el coeficiente binomial:

$C(n,k) = n! / [k! (n - k)!]$, para $0 \le k \le n$.

La fórmula expresa precisamente la eliminación del orden. También puede leerse $C(n,k) = C(n,n - k)$: elegir los elementos seleccionados equivale a elegir su complemento. Esta simetría sirve de comprobación y facilita algunos cálculos.

Para $n \ge 2$ y $1 \le k \le n - 1$, la relación de Pascal, $C(n,k) = C(n - 1,k - 1) + C(n - 1,k)$, se demuestra separando los grupos que contienen un objeto fijado de los que no lo contienen. Esta demostración da sentido a los dos términos; es más útil que una identidad factorial aprendida sin interpretación.

3. Unión, intersección y complemento

El suceso contrario de A, escrito no A o A^c, contiene todos los resultados que no pertenecen a A. Su probabilidad vale $1 - P(A)$. Esta relación es especialmente eficaz para tratar «al menos uno» calculando primero «ninguno», cuando este último suceso se describe más fácilmente.

La intersección $A \cap B$ significa que se producen ambos sucesos. La unión $A \cup B$ significa que se produce al menos uno, posiblemente ambos. La fórmula general es $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. La

resta elimina el doble recuento de la intersección. Si los sucesos son incompatibles, su intersección es vacía y esta contribución es nula.

La incompatibilidad y la independencia son dos nociones distintas. Dos sucesos incompatibles con probabilidades estrictamente positivas no son independientes: la aparición de uno excluye al otro. A la inversa, los sucesos independientes pueden producirse juntos. Un lanzamiento par y un lanzamiento que da al menos cuatro pueden compartir resultados sin ser automáticamente independientes; su relación se calcula en el modelo.

Un dibujo de dos conjuntos puede ayudar a entender las operaciones, pero no proporciona una medida fiable de sus probabilidades si las superficies no se han construido con esa finalidad. Los diagramas organizan el razonamiento; los datos y la distribución aseguran el cálculo.

4. Probabilidad condicionada: cambiar el espacio de referencia

Cuando P(A) es estrictamente positiva, la probabilidad de B dado A se define mediante P(B|A) = P(A ∩ B)/P(A). El denominador corresponde al suceso que se convierte en la referencia. Se puede reescribir P(A ∩ B) = P(A) P(B|A). Esta relación permite calcular una rama de un árbol sin suponer independencia.

En una población ficticia de lotes, el 40 % procede del taller A y el 60 % del taller B. La probabilidad de que un lote respete un criterio indicado es del 90 % en A y del 60 % en B. El suceso R designa el cumplimiento del criterio. Las probabilidades conjuntas son P(A ∩ R) = 0,40 × 0,90 = 0,36 y P(B ∩ R) = 0,60 × 0,60 = 0,36.

Como los dos talleres forman una partición de la población, P(R) = 0,72. Entre los lotes que respetan el criterio, la probabilidad de procedencia A vale 0,36/0,72 = 0,50. No vale ni 0,40 ni 0,90. El

cálculo ha cambiado la población de referencia: ya no se consideran todos los lotes, sino solamente los que satisfacen el criterio.

Este ejemplo muestra por qué P(R|A) y P(A|R) no son intercambiables. La primera describe los resultados dentro del taller; la segunda describe el origen entre los resultados seleccionados. Los mismos sucesos aparecen en ambas expresiones, pero sus denominadores difieren.

Una tabla de doble entrada constituye otra representación. De mil lotes ficticios conformes a las proporciones del modelo, 400 proceden de A y 600 de B; 360 en cada grupo respetan el criterio. Entre los 720 lotes seleccionados, la mitad procede de A. Esta tabla puede hacer más tangible la condición que los símbolos, sin sustituir a la definición.

5. Probabilidad total y efecto de las tasas de base

Una partición es una familia de sucesos incompatibles que cubre el espacio de resultados. Para una partición A_1, …, A_m cuyas probabilidades son positivas, P(B) es la suma de P(A_i) P(B|A_i). Se suman contribuciones que pertenecen a grupos distintos. Esta fórmula no exige que B sea independiente de los grupos.

Un dispositivo ficticio de control señala el 95 % de las piezas defectuosas y también señala el 5 % de las piezas no defectuosas. El modelo supone que el 1 % de las piezas es defectuoso. De diez mil piezas teóricas, se cuentan cien defectuosas, de las que noventa y cinco están señaladas, y nueve mil novecientas no defectuosas, de las que cuatrocientas noventa y cinco están señaladas. Por tanto, el número total señalado es quinientos noventa.

La probabilidad de que una pieza señalada sea efectivamente defectuosa es 95/590, aproximadamente 16,1 %. Por tanto, una

gran proporción de piezas defectuosas detectadas no significa que todas las señales sean fiables. La tasa de base de los defectos y las falsas señales contribuyen al resultado. El ejemplo no se refiere a una decisión médica: ilustra únicamente un razonamiento condicionado en una fabricación imaginaria.

El mismo dispositivo aplicado a una población en la que los defectos fueran mucho más frecuentes produciría otra probabilidad condicionada después de una señal. Por tanto, sería erróneo presentar el resultado como una propiedad aislada del dispositivo. Esta prudencia se vuelve esencial cuando se comunica un porcentaje sin describir la población de partida.

6. Independencia: una hipótesis que permite un producto

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$. Si $P(A)$ es positiva, esta condición equivale a $P(B|A) = P(B)$. Saber que se ha producido A no modifica entonces la probabilidad de B en el modelo. La independencia expresa una estructura probabilística, no la ausencia de proximidad espacial ni una ausencia general de causa común.

Dos lanzamientos sucesivos de una moneda suelen modelizarse como independientes con una probabilidad de éxito constante. Las extracciones con reposición también pueden serlo si la mezcla y el mecanismo son adecuados. Las extracciones sin reposición en una urna pequeña generalmente no lo son: la composición restante cambia después de la primera extracción.

Una urna contiene tres bolas rojas y dos azules. Sin reposición, P(roja en la primera extracción) = 3/5, y la probabilidad de roja en la segunda dado que la primera fue roja vale 2/4. Por tanto, la probabilidad de dos rojas es 3/10. Con reposición y una mezcla conforme al modelo, valdría $(3/5)^2 = 9/25$. Los dos experimentos no son dos cálculos alternativos para el mismo protocolo.

Para varios ensayos, se utiliza una independencia conjunta adecuada a la sucesión considerada. Comprobar relaciones por parejas no basta, en general, para establecer toda la estructura de independencia de una familia. En los ejercicios de esquema de Bernoulli, la independencia del conjunto de los ensayos es una hipótesis indicada del modelo; debe mencionarse antes de multiplicar.

7. La variable aleatoria cuenta lo que se estudia

Una variable aleatoria asocia un número a cada resultado. Dos resultados distintos pueden dar el mismo valor. Su distribución indica los valores posibles y sus probabilidades. Su esperanza es la media ponderada de esos valores por sus probabilidades, no un valor que el experimento deba producir obligatoriamente.

Una variable de Bernoulli vale uno en caso de éxito y cero en caso contrario, con probabilidad de éxito p. Su esperanza vale p. Como su cuadrado es igual a ella misma, su varianza vale $p - p^2 = p(1 - p)$. La palabra éxito es una convención de recuento: puede designar un defecto, una avería o un suceso indeseable, sin juicio de valor.

Para una variable X, la varianza se escribe $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$. Mide una dispersión cuadrática alrededor de la esperanza. La desviación típica es su raíz cuadrada y tiene la misma unidad que X. Una varianza en segundos cuadrados y una desviación típica en segundos no son intercambiables.

La linealidad $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ no exige independencia. En cambio, sumar las varianzas de dos variables exige condiciones, en particular independencia en el marco estudiado aquí. Si $Y = X$, la varianza de $X + Y$ vale $4\,V(X)$, no $2\,V(X)$. Este contraejemplo muestra por qué no se puede eliminar la condición.

8. Construir la distribución binomial en lugar de adivinarla

Un esquema de Bernoulli repite n ensayos independientes, cada uno con dos resultados y la misma probabilidad de éxito p. La variable X cuenta el número de éxitos. Sigue entonces una distribución binomial de parámetros n y p. Comprobar los cuatro elementos -repetición, dos categorías, probabilidad constante e independencia- precede a la elección de esta distribución.

Para una secuencia precisa que contiene k éxitos y n − k fracasos, la probabilidad vale p^k (1 − p)^(n − k). El número de secuencias que dan exactamente k éxitos es C(n,k), porque hay que elegir las posiciones de los éxitos. Estas secuencias son incompatibles, por lo que se suman sus probabilidades idénticas:

P(X = k) = C(n,k) p^k (1 − p)^(n − k).

El coeficiente binomial no representa un factor misterioso añadido a una potencia. Corrige el hecho de que un mismo número de éxitos puede aparecer en varios órdenes. Para n = 3 y k = 2, las secuencias éxito-éxito-fracaso, éxito-fracaso-éxito y fracaso-éxito-éxito son distintas, de donde el factor tres.

La fórmula se completa naturalmente en los casos p = 0 o p = 1 mediante las distribuciones ciertas correspondientes, en lugar de efectuar manipulaciones ambiguas de 0^0. Cuando p = 0, X siempre vale cero; cuando p = 1, X siempre vale n. Estos casos límite ofrecen una comprobación conceptual de la distribución.

9. Esperanza, varianza y alcance de los valores medios

Escribamos X como suma de n variables de Bernoulli independientes X_1, …, X_n. Por linealidad, E(X) = n p. Por suma de las varianzas independientes, V(X) = n p(1 − p). La desviación típica vale √[n p(1 − p)]. Estos resultados se asocian al número de éxitos, no a una frecuencia; la frecuencia X/n tiene otra varianza.

En quince ensayos independientes con p = 0,80, el número medio de éxitos vale doce y la varianza 2,4. La desviación típica es aproximadamente 1,55. Esto no significa que todas las series produzcan doce éxitos ni que todas permanezcan entre doce menos 1,55 y doce más 1,55. La esperanza y la desviación típica resumen la distribución sin sustituir a las probabilidades de sucesos precisos.

Una esperanza puede no ser entera aunque X siempre lo sea. Con tres ensayos de probabilidad 0,50, la esperanza vale 1,5 éxitos. Ningún experimento observa un éxito y medio; el número describe una media teórica. La distinción entre valor posible y media evita redondear una esperanza para tratarla como un resultado garantizado.

Si la probabilidad p depende del ensayo, la suma de éxitos generalmente ya no sigue la distribución binomial clásica, incluso con independencia. Su esperanza todavía puede obtenerse sumando las probabilidades individuales. Entonces hace falta otro método para su distribución o su varianza. Un modelo ligeramente más complicado puede ser más fiel que una binomial elegida por costumbre.

10. Calcular sucesos y resolver un umbral

Para diez ensayos independientes con p = 0,20, la probabilidad de dos éxitos vale C(10,2) × 0,20² × 0,80⁸, es decir, aproximadamente 0,302. La probabilidad de al menos un éxito es 1 − 0,80¹⁰, aproximadamente 0,893. La segunda pregunta se trata más fácilmente mediante el complemento; sumar diez términos de la distribución sería posible, pero innecesariamente largo.

Busquemos el menor número n de ensayos independientes de probabilidad 0,20 para que la probabilidad de al menos un éxito alcance el 95 %. Se necesita 1 − 0,80^n ≥ 0,95, por lo que 0,80^n

≤ 0,05. El logaritmo da n ln 0,80 ≤ ln 0,05. Como ln 0,80 es negativo, la división invierte el sentido: n ≥ ln 0,05/ln 0,80, aproximadamente 13,43. El menor entero es catorce.

Se comprueban los dos valores vecinos: trece ensayos dan aproximadamente 94,5 % y catorce aproximadamente 95,6 %. Esta comprobación confirma tanto el redondeo entero como el carácter mínimo. Una calculadora que muestra 13,43 no responde directamente a una pregunta que se refiere a un número de ensayos.

Para una probabilidad de tipo P(X ≤ k), se suman los términos de cero a k incluido. Para P(X > k), se puede utilizar 1 − P(X ≤ k). La inclusión del umbral debe leerse con precisión: «más de cinco» no significa «al menos cinco». Una gran parte de los errores de la distribución binomial procede de esta traducción, incluso cuando la fórmula y los parámetros son correctos.

11. Ejercicios resueltos e interpretación

Ejercicio A. Formar un comité de dos personas entre seis y después designar una presidencia entre las dos. Existen C(6,2) = 15 comités y dos elecciones de presidencia para cada uno: treinta posibilidades. También se puede elegir primero a la persona que preside y después al otro miembro, es decir, 6 × 5. Los dos métodos recuperan treinta porque cuentan las mismas configuraciones.

Ejercicio B. Una urna contiene cuatro bolas rojas y una azul. Se realizan dos extracciones sin reposición. La probabilidad de obtener exactamente una roja vale P(roja y después azul) + P(azul y después roja), es decir, (4/5)(1/4) + (1/5)(4/4) = 2/5. Utilizar una distribución binomial con p = 4/5 sería inadecuado, porque cambia la segunda probabilidad condicionada.

Ejercicio C. Seis ensayos independientes tienen una probabilidad de éxito igual a 1/2. La probabilidad de al menos cinco éxitos vale $[C(6,5) + C(6,6)]/2^6 = 7/64$, aproximadamente 10,9 %. El cálculo incluye cinco y seis. La simetría de la distribución da la misma probabilidad para como máximo un éxito, lo que proporciona una comprobación.

Ejercicio D. Se define una puntuación $Y = 3X - 2$, donde X sigue una distribución binomial de parámetros diez y 0,20. Su esperanza vale $3 \times 2 - 2 = 4$. Su varianza vale $9 \times 1,6 = 14,4$. Restar dos no cambia la dispersión; multiplicar por tres multiplica la desviación típica por tres y la varianza por nueve.

Ejercicio E. «Un suceso tiene una probabilidad del 1 %, por lo que debe aparecer una vez en cien ensayos». Esta afirmación es falsa. Bajo independencia y probabilidad constante, la probabilidad de no observarlo nunca en cien ensayos vale $0,99^{100}$, aproximadamente 36,6 %. La esperanza del número de apariciones es efectivamente uno, pero no impone el resultado de cada serie.

12. Qué debe hacer visible una resolución probabilística

Una solución debe describir los sucesos antes de simbolizarlos, indicar el protocolo, justificar los condicionamientos y recordar las hipótesis que permiten los productos. Debe presentar una probabilidad entre cero y uno, o el porcentaje correspondiente, y después interpretarla en la población adecuada. Una esperanza, una frecuencia y una probabilidad condicionada no pueden sustituirse entre sí.

La precisión numérica debe adaptarse a la pregunta. Para comparar dos probabilidades cercanas a un umbral, se conservan suficientes cifras hasta la conclusión. Para una ilustración general, pueden bastar tres cifras significativas. En todos los casos, el

redondeo final no debe ocultar el sentido de una desigualdad ni transformar una estimación en certeza.

Referencia de encuadre

El programa francés de la especialidad de matemáticas de Terminale proporciona el marco de los temas de recuento, esquema de Bernoulli y sumas de variables. Las demostraciones, situaciones ficticias y ejercicios anteriores son originales: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Capítulo 11 - Geometría en el espacio: vectores, planos y distancias

Referencia histórica - Descartes: relacionar una figura con ecuaciones

La Géométrie acompaña al Discours de la méthode de Descartes en 1637. La presentación institucional de la BnF destaca su procedimiento de conversión de problemas geométricos en ecuaciones. La conexión con nuestro capítulo es el paso entre objeto geométrico y escritura algebraica: un vector, una recta o un plano deben conservar su significado cuando se calculan sus coordenadas. Este hito no significa que Descartes ya utilizara todo nuestro formalismo vectorial moderno en tres dimensiones. Ayuda a entender un método de representación, sin sustituir a la comprobación geométrica del resultado.

Fuente histórica: Bibliothèque nationale de France - presentación institucional: https://www.bnf.fr/fr/mediatheque/les-equations-la-methode-de-descartes-pour-resoudre-les-problemes-geometriques

1. Ver una figura sin pedirle que demuestre

Una representación del espacio en una hoja conserva algunas relaciones y deforma otras. Dos segmentos dibujados paralelos pueden representar direcciones diferentes; un ángulo recto puede no parecer recto en perspectiva. La figura sirve para organizar los puntos, las caras y las hipótesis. La demostración se apoya en relaciones geométricas o algebraicas establecidas, no solo en la impresión visual.

Un cubo dibujado en perspectiva invita, por ejemplo, a distinguir una diagonal de una cara y una diagonal del sólido. La primera pertenece al plano de una cara y la segunda une dos vértices opuestos a través del espacio. En un cubo de arista a, sus

longitudes son respectivamente a√2 y a√3. El dibujo no permite compararlas con una regla si la proyección acorta de manera distinta las direcciones.

La geometría con coordenadas traduce las configuraciones en coordenadas y ecuaciones. No elimina la geometría: proporciona otro lenguaje para expresar alineación, paralelismo, ortogonalidad o intersección. Una resolución completa debe volver al significado espacial después del cálculo. Un sistema sin solución significa algo sobre los objetos estudiados; no es solamente un resultado técnico.

2. Puntos, vectores y sistemas de referencia: tres objetos distintos

Un punto describe una posición. Un vector describe un desplazamiento orientado o una dirección dotada de una magnitud. En un sistema de referencia, las coordenadas del vector AB son las de B menos las de A. Si A = (1,2,−1) y B = (4,0,3), entonces AB = (3,−2,4). Sería falso llamar «coordenadas de AB» a las de B únicamente, salvo si A es el origen del sistema de referencia.

Un vector puede representarse mediante segmentos orientados situados en distintos lugares. La igualdad de dos vectores significa misma dirección, mismo sentido y misma longitud, no necesariamente mismos extremos. Esta distinción permite utilizar los lados de un paralelogramo o de un cubo sin confundir desplazamiento con posición absoluta.

Una base del espacio contiene tres vectores tales que todo vector se expresa de manera única como su combinación lineal. En un sistema de referencia ortonormal, los vectores de la base son unitarios y ortogonales dos a dos. Las fórmulas usuales de módulo

y producto escalar en coordenadas se apoyan en esta propiedad. No se aplican sin modificación a una base cualquiera.

Por ejemplo, si dos vectores unitarios de una base forman un ángulo de sesenta grados, la suma de ambos tiene un módulo √3, no √2. Por tanto, las coordenadas por sí solas no bastan para calcular una longitud sin conocer la geometría de la base. En los ejercicios de este capítulo, el sistema de referencia es ortonormal salvo indicación explícita.

3. Combinaciones lineales, colinealidad y coplanaridad

Dos vectores no nulos son colineales si uno es un múltiplo real del otro. El multiplicador puede ser positivo o negativo; su signo indica el mismo sentido o el sentido opuesto. Para comprobar la colinealidad en coordenadas, se busca un coeficiente común a todas las componentes. No se divide a ciegas entre una componente que podría ser nula.

Los vectores (2,−1,0) y (−6,3,0) son colineales con coeficiente −3. Los vectores (2,−1,0) y (−6,3,1) no lo son, porque la tercera componente impediría la igualdad. El vector nulo es una combinación lineal de cualquier vector, pero no constituye una dirección de recta. Esta particularidad debe tenerse presente cuando una demostración utiliza un vector director.

Tres puntos A, B y C están alineados cuando AB y AC son colineales. Para mostrar que cuatro puntos son coplanarios, se puede buscar si AD es una combinación de AB y AC, cuando estos últimos no son colineales. Se resuelve entonces AD = α AB + β AC. La existencia de una solución significa que D pertenece al plano que pasa por A y está generado por esas dos direcciones.

Consideremos A en el origen, AB = (1,0,1) y AC = (0,1,1). Todo punto del plano tiene las coordenadas (α,β,α + β). Por tanto, la ecuación del plano es z = x + y. El punto (1,1,2) pertenece a él; el

punto (1,1,3) no pertenece. Esta lectura conecta directamente combinación lineal y ecuación cartesiana.

Cuando los dos vectores elegidos son colineales, solo generan una recta. Entonces hay que elegir otras direcciones para describir el plano o tratar un caso degenerado. Una fórmula escrita con dos parámetros no es automáticamente una representación de un plano si las direcciones no son independientes.

4. Representar una recta con un parámetro

Una recta que pasa por A y tiene un vector director no nulo u es el conjunto de puntos M tales que AM = t u, donde t recorre los reales. Si A = (a,b,c) y u = (u_1,u_2,u_3), se escribe x = a + t u_1, y = b + t u_2, z = c + t u_3. Las tres coordenadas dependen del mismo parámetro t. Emplear tres parámetros independientes describiría otro conjunto.

La elección del punto de partida y de la longitud del vector director no es única. Sustituir u por 2u conserva la recta; simplemente se modifica la escala del parámetro. Sustituir A por otro punto de la recta también conserva el conjunto. Por tanto, dos expresiones diferentes pueden representar exactamente el mismo objeto.

Para comprobar si un punto pertenece a la recta, se busca un único valor de t que satisfaga simultáneamente todas las coordenadas. Para la recta (1 + 2t, t, 2 − t), el punto (3,1,1) corresponde a t = 1 en las tres ecuaciones. El punto (3,1,2) no sirve: las dos primeras imponen t = 1, pero la tercera daría uno.

Una recta completa, una semirrecta y un segmento se distinguen por el conjunto de valores del parámetro. Para el segmento de A a B, es adecuada la expresión A + t AB con t entre cero y uno. Si t recorre todos los reales, describe la recta, incluido lo que hay más allá de los extremos. Olvidar la restricción podría dar una intersección situada fuera del segmento realmente estudiado.

5. Producto escalar, módulo y ángulo

En un sistema de referencia ortonormal, $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$. El módulo de u es $\sqrt{(u \cdot u)}$. Para vectores no nulos, el producto escalar también es igual a $||u||\ ||v||\ \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores, comprendido entre cero y π. Las dos expresiones conectan el cálculo en coordenadas con la interpretación geométrica.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es nulo. Para $u = (1,2,-1)$ y $v = (2,-1,0)$, el producto vale dos menos dos, es decir, cero. La comprobación exige todas las componentes; no basta con la perpendicularidad aparente de sus proyecciones en una figura.

En un cubo de arista uno, el vector de una arista puede ser (1,0,0) y el de una diagonal del sólido (1,1,1). El coseno de su ángulo vale $1/\sqrt{3}$. Por tanto, el ángulo es aproximadamente de 54,7 grados. No vale cuarenta y cinco grados, ángulo que corresponde a una diagonal de una cara con una arista de esa cara. Las dos configuraciones son diferentes.

El desarrollo $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2u \cdot v + ||v||^2$ permite recuperar el teorema de Pitágoras cuando el producto escalar es nulo. También permite expresar el producto escalar a partir de longitudes. El signo del término cruzado indica si la suma es más o menos larga que en el caso ortogonal.

Dos rectas de direcciones ortogonales no son necesariamente secantes. En el espacio, la recta (t,0,0) y la recta (0,1,s) tienen direcciones ortogonales, pero ningún punto común, puesto que sus segundas coordenadas siguen siendo cero y uno. Se habla de ortogonalidad de direcciones; hablar de rectas perpendiculares suele añadir una intersección. El matiz evita importar demasiado deprisa una intuición del plano.

6. Definir un plano mediante un vector normal

Un vector normal no nulo n es ortogonal a todas las direcciones de un plano. Si el plano pasa por A, un punto M pertenece a él cuando n·AM = 0. Para n = (a,b,c) y A = (x_A,y_A,z_A), se obtiene a(x − x_A) + b(y − y_A) + c(z − z_A) = 0, es decir, una ecuación a x + b y + c z + d = 0.

Al menos uno de los coeficientes a, b y c debe ser no nulo. De lo contrario, la ecuación sería una identidad o una contradicción, no una ecuación de un plano. Multiplicar todos los coeficientes por una misma constante no nula conserva el plano. Por tanto, el vector normal no es único y su sentido no impone una orientación obligatoria al plano.

El plano x + 2y − z − 3 = 0 tiene el vector normal (1,2,−1) y contiene A = (3,0,0). El punto (1,1,0) también pertenece a él. Una dirección de vector u pertenece a este plano si n·u = 0; un punto pertenece al plano si sus coordenadas satisfacen la ecuación. Confundir estas dos pruebas equivale a olvidar el término constante que fija la posición.

Para construir un vector normal a partir de dos direcciones no colineales, se puede buscar n cuyo producto escalar con cada una sea nulo, resolviendo un sistema. No es necesario introducir una técnica no estudiada para resolver un caso sencillo. El producto vectorial constituye otro método, pero aquí forma parte de un posible complemento, no de un requisito previo oculto.

7. Posiciones relativas: el sistema da una conclusión geométrica

Para intersectar una recta A + t u con un plano n·M + d = 0, se sustituyen las coordenadas de M. Se obtiene n·A + d + t(n·u) = 0. Si n·u es no nulo, existe un valor único de t y, por tanto, un punto de intersección único. Si n·u vale cero, la recta es paralela al plano; está contenida en él si n·A + d también vale cero y, si no, no lo corta.

La recta M(t) = (1 + 2t, t, 2 − t) y el plano x + 2y − z − 3 = 0 dan −4 + 5t = 0. La intersección corresponde a t = 4/5 y al punto (13/5,4/5,6/5). Se comprueba este punto en la ecuación del plano. Si la misma parametrización describiera un segmento con t entre cero y uno, la intersección seguiría siendo admisible; con t entre dos y tres, ya no lo sería.

Para dos rectas, se utilizan parámetros distintos t y s y después se igualan sus coordenadas. Una solución única da una intersección. La ausencia de solución puede corresponder a rectas paralelas distintas o a rectas que se cruzan sin cortarse; las direcciones permiten distinguir estas situaciones. Una infinidad de soluciones puede expresar coincidencia, cuando las rectas describen el mismo conjunto.

Dos planos cuyas normales son colineales son paralelos o coincidentes. Con normales no colineales, su intersección es una recta. Por ejemplo, los planos x + y + z = 1 y x − y = 0 dan x = y = t y z = 1 − 2t. La recta de intersección tiene como dirección (1,1,−2). Cada punto propuesto debe satisfacer las dos ecuaciones, no solamente una.

8. Proyección ortogonal sobre una recta

La proyección ortogonal H de un punto M sobre una recta de punto A y dirección u pertenece a la recta y satisface MH ortogonal a u. Escribiendo H = A + t u, la condición se convierte en (A + t u − M)·u = 0. Como u es no nulo, se obtiene t = [(M − A)·u]/||u||².

Para A en el origen, u = (1,1,0) y M = (2,2,1), se encuentra t = 4/2 = 2. La proyección es H = (2,2,0) y la distancia de M a la recta vale uno. Si el vector director se hubiera sustituido por (2,2,0), el parámetro habría sido uno; el punto H y la distancia serían idénticos.

¿Por qué es mínima esta distancia? Para cualquier otro punto P de la recta, MH es ortogonal a HP. El teorema de Pitágoras da MP² = MH² + HP², por lo que MP ≥ MH. La igualdad exige P = H. Esta demostración conecta la construcción con el problema de optimización en lugar de presentar una fórmula de distancia sin razón.

La distancia a un segmento puede exigir una etapa adicional. Si la proyección sobre la recta se encuentra fuera del segmento, el punto del segmento más próximo es un extremo. El problema ya no es exactamente el de una recta infinita. Comprobar el valor del parámetro evita obtener una distancia correcta para el objeto equivocado.

9. Proyección ortogonal sobre un plano

Para el plano a x + b y + c z + d = 0, de normal n = (a,b,c), la proyección H de M se encuentra en la recta que pasa por M con dirección n. Se puede escribir H = M − α n. La condición de pertenencia al plano da α = (a x_M + b y_M + c z_M + d)/(a² + b² + c²).

Para M = (1,1,4) y el plano x + 2y − z − 3 = 0, el numerador vale −4 y el denominador seis. Se obtiene H = M + (2/3)(1,2,−1), es decir, H = (5/3,7/3,10/3). La sustitución en el plano da cero. El vector MH es colineal con la normal; por tanto, se comprueban los dos criterios de la proyección.

La distancia al plano es el módulo de MH, es decir, |a x_M + b y_M + c z_M + d|/√(a² + b² + c²). En el ejemplo, vale 4/√6, aproximadamente 1,63 unidades de longitud. El valor absoluto elimina el signo ligado al lado del plano; una distancia no puede ser negativa.

El carácter mínimo se demuestra como para la recta. Para todo punto P del plano, HP es una dirección del plano y, por tanto, ortogonal a MH. Así, MP² = MH² + HP². El punto H es el único que alcanza la distancia mínima. Por tanto, la fórmula no es solamente un cálculo práctico: responde a una propiedad geométrica demostrada.

10. Lugares geométricos y volúmenes

El plano mediador del segmento AB es el conjunto de puntos equidistantes de A y B. Al desarrollar MA² = MB², los términos cuadráticos en las coordenadas de M se simplifican y se obtiene una ecuación de plano. Este plano pasa por el punto medio del segmento y tiene AB como vector normal. Para A = (0,0,0) y B = (2,0,0), su ecuación es x = 1.

Una esfera de centro O y radio r es el conjunto de puntos M tales que OM = r. En un sistema de referencia ortonormal centrado en O, su ecuación es x² + y² + z² = r². El sólido lleno correspondiente utiliza una desigualdad menor o igual. La superficie y el volumen no son el mismo conjunto.

La esfera x² + y² + z² = 4 corta el plano z = 1 según la circunferencia x² + y² = 3, situada en ese plano y de radio √3. Un

plano a distancia mayor que dos del centro no la corta; a distancia exactamente dos, es tangente a ella. Estos casos se entienden mediante la distancia del centro al plano, antes de cualquier cálculo detallado.

Para un tetraedro de vértices O = (0,0,0), A = (2,0,0), B = (0,3,0), C = (0,0,4), la base OAB es un triángulo rectángulo de área tres. La altura desde C vale cuatro. Por tanto, el volumen es un tercio de tres por cuatro, es decir, cuatro unidades de volumen. Un área de base y una altura deben corresponder a una dirección perpendicular en la definición utilizada; la longitud de una arista oblicua no siempre es la altura.

11. Ejercicios resueltos y comprobaciones

Ejercicio A. ¿Los puntos A = (1,0,2), B = (3,1,1) y C = (5,2,0) están alineados? AB = (2,1,−1) y AC = (4,2,−2) = 2 AB. Están alineados. El coeficiente dos significa que C se encuentra en la misma dirección desde A, al doble de distancia que B; no está entre A y B.

Ejercicio B. Hallar el plano que pasa por A = (1,0,2) y es normal a n = (2,−1,3). La ecuación es 2(x − 1) − y + 3(z − 2) = 0, es decir, 2x − y + 3z − 8 = 0. Se comprueba primero A; la dirección (1,2,0) es efectivamente una dirección del plano, puesto que su producto escalar con n vale cero.

Ejercicio C. ¿La recta (t,2 − t,1) pertenece al plano x + y + z = 3? La suma de las coordenadas siempre vale tres. Por tanto, toda la recta está contenida en el plano, no solo el punto obtenido para un valor particular de t. Una sustitución simbólica permite aquí una conclusión más fuerte que una prueba numérica aislada.

Ejercicio D. Calcular la distancia de M = (0,0,0) al plano 2x − y + 2z − 6 = 0. El numerador en valor absoluto es seis y el módulo de la normal tres. La distancia vale dos. Multiplicar la ecuación del

plano por cinco multiplica numerador y denominador por cinco; el resultado debe permanecer inalterado.

Ejercicio E. ¿Una recta de dirección (1,0,0) y otra de dirección (0,1,0) son necesariamente secantes? No. Sus direcciones son ortogonales, pero pueden pertenecer a planos horizontales distintos. Para concluir que se cortan, también hay que estudiar sus puntos y resolver las condiciones de intersección.

12. Organizar una demostración en el espacio

El método depende de la pregunta. Para una pertenencia, se sustituyen coordenadas o se busca un parámetro. Para un paralelismo, se comparan direcciones o normales. Para una ortogonalidad, se utiliza un producto escalar precisando los objetos implicados. Para una distancia mínima, se construye una proyección y se justifica el mínimo mediante Pitágoras. Esta clasificación transforma una figura compleja en una sucesión de pruebas específicas.

Los cálculos deben conservar su interpretación. Un valor del parámetro no es una distancia; un vector normal no es un punto; una ecuación satisfecha por un punto no describe automáticamente una recta completa. Después de cada etapa, reformule qué establece el resultado y qué queda por demostrar. Esta disciplina permite utilizar el álgebra sin perder el objeto geométrico.

Referencia de encuadre

Programa francés de la especialidad de matemáticas de Terminale, apartados de vectores, ortogonalidad y representaciones del espacio. Las configuraciones y las demostraciones pedagógicas son originales: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Capítulo 12 - Estadística, concentración y procedimientos algorítmicos

Referencia histórica - Bienaymé y Chebyshev: acotar las desviaciones

Bienaymé publica en 1853 la desigualdad hoy asociada a los nombres de Bienaymé y Chebyshev; Chebyshev la publica a su vez en 1867. Esta historia aclara el papel de una cota probabilística: puede controlar un riesgo de desviación sin describir exactamente toda la distribución. Así, el capítulo distingue una frecuencia observada, una probabilidad teórica y una cota superior a veces poco precisa, pero válida bajo sus hipótesis. Esta referencia no garantiza que una muestra particular esté cerca de la media ni atribuye el descubrimiento a un solo nombre.

Fuente histórica: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bienayme/

1. Describir los datos antes de interpretarlos

Una serie de números no tiene un significado independiente de su origen. Hay que preguntar qué magnitud se mide, en qué unidad, en qué población, en qué fechas y según qué protocolo. Duraciones, masas y categorías codificadas mediante números no se tratan de la misma manera. Un código postal no es una magnitud cuya media tenga un significado geográfico directo.

La estadística descriptiva resume los datos disponibles. La inferencia busca extraer información sobre una población o un mecanismo más allá de esas observaciones. El paso de una a otra exige hipótesis de muestreo. Una gráfica de cien respuestas voluntarias puede describir esas respuestas; no representa automáticamente a todos los habitantes de un territorio.

Antes de calcular, compruebe los valores ausentes, los duplicados, los cambios de unidad y las categorías. Un valor ausente no debe sustituirse por cero sin justificación. Cero es un valor y su introducción puede desplazar una media o una proporción. Del mismo modo, un duplicado no siempre es una repetición independiente; puede ser un error de introducción de datos.

Una síntesis honesta conserva el tamaño de la muestra y el método de recogida junto al resultado. Decir «la media vale seis» no permite valorar una serie sin su unidad, su dispersión ni su tamaño. La precisión de visualización no crea precisión de información: escribir seis con diez decimales no corrige una medida poco precisa ni una selección sesgada.

2. Media, mediana y dispersión

Para n observaciones x_1, …, x_n, la media aritmética es la suma dividida entre n. Utiliza todos los valores y puede ser sensible a observaciones extremas. Para grupos de distintos tamaños, la media global debe ponderar las medias de grupo según sus tamaños; la simple media de las medias solo es correcta en casos particulares.

La mediana divide una serie ordenada en dos partes. Con un número impar de datos, corresponde al valor central. Con un número par, habitualmente se utiliza la media de los dos valores centrales como convención de cálculo. Esta convención debe conocerse cuando se comparan programas o presentaciones. Los cuartiles también exigen una convención explícita: algunos métodos eligen valores observados y otros interpolan.

Para la serie 2, 3, 3, 4, 18, la media vale seis y la mediana tres. El valor dieciocho tira de la media hacia arriba. Esto no hace falsa la media; muestra que, por sí sola, no describe un valor «típico». Según la pregunta, se pueden presentar juntas media, mediana y

dispersión en lugar de elegir el indicador que mejor apoye una conclusión deseada.

La varianza descriptiva con divisor n es la media de los cuadrados de las diferencias respecto de la media. También puede calcularse como la media de los cuadrados menos el cuadrado de la media. En la serie anterior, la media de los cuadrados vale 72,4 y el cuadrado de la media treinta y seis; por tanto, la varianza vale 36,4 y la desviación típica aproximadamente 6,03. La desviación típica conserva la unidad de las observaciones y la varianza su cuadrado.

Una varianza muestral con divisor n − 1 responde a otra convención y a un objetivo de estimación particular. No es una corrección que se deba aplicar automáticamente a toda serie descriptiva. Antes de utilizar una orden de cálculo, hay que saber qué divisor y qué finalidad adopta. Dos resultados distintos pueden proceder de esta convención, sin error aritmético.

3. Ponderaciones y efectos de composición

Dos grupos tienen medias respectivas de diez y veinte. Si el primero contiene noventa observaciones y el segundo diez, la media global vale once, no quince. La ponderación expresa la cantidad de información de cada grupo. No puede sustituirse por una elección intuitiva cuando se conocen los tamaños.

Las comparaciones entre poblaciones pueden cambiar con su composición. Supongamos dos actividades ficticias, una fácil y otra difícil. Una organización puede tener una tasa de éxito mejor en cada actividad y, aun así, una tasa global inferior si trata muchos más casos difíciles. Antes de anunciar una superioridad global, se examinan las categorías y las distribuciones.

Este fenómeno no justifica descartar todo indicador agregado. Invita a explicitar la pregunta: ¿se quiere medir el rendimiento en

una categoría comparable o el resultado total de una organización en su actividad real? Ambas preguntas tienen interés, pero no exigen necesariamente la misma ponderación. El rigor consiste en no pasar silenciosamente de una a otra.

Una gráfica también debe conservar una escala legible. Un eje vertical truncado puede hacer que parezca enorme una variación pequeña; una escala logarítmica puede ser útil para comparar cocientes, pero debe indicarse. La representación no es una demostración adicional independiente de los números que dibuja.

4. Sumas y medias de variables aleatorias

Consideremos n variables independientes con la misma distribución, esperanza μ y varianza σ² finita. Su suma S_n tiene esperanza nμ y varianza nσ². Su media M_n = S_n/n tiene esperanza μ y varianza σ²/n. Su desviación típica vale σ/√n. Esta relación expresa la disminución de la dispersión de la media en este modelo de repetición.

Por tanto, dividir la desviación típica entre dos exige multiplicar el tamaño de la muestra por cuatro, no por dos. Multiplicar n por cien divide la desviación típica de la media entre diez. La mejora no progresa linealmente con el número de observaciones. Esta dependencia explica el coste de una mayor precisión en un muestreo.

Las hipótesis son esenciales. Si todas las observaciones repiten el mismo error aleatorio común, su media no se beneficia de la misma reducción. Si los valores no siguen la misma distribución, su interpretación exige una adaptación. Si un método de recogida selecciona siempre la misma categoría, un gran tamaño puede hacer muy precisa una media que no representa la población buscada.

La relación σ/√n es una propiedad teórica de la distribución de la media, no una promesa de que cada media observada se encuentre exactamente a esa distancia de μ. Tampoco significa que la desviación típica de las observaciones individuales disminuya al recoger más datos. Las observaciones conservan su distribución; es su media la que se vuelve menos dispersa en el modelo.

5. Demostrar la desigualdad de Bienaymé-Chebyshev

Para una variable X de esperanza μ y varianza finita V, y para δ estrictamente positivo, la desigualdad afirma:

$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$.

Relaciona la probabilidad de una desviación importante con una medida de dispersión. Si el miembro derecho supera uno, la cota sigue siendo matemáticamente verdadera, pero aporta menos que la cota elemental de una probabilidad por uno. Entonces se puede conservar el mínimo de los dos valores.

Una demostración breve consiste en definir $Y = (X - \mu)^2$, variable positiva o nula. En el suceso $|X - \mu| \geq \delta$, se tiene $Y \geq \delta^2$. La esperanza de Y es al menos δ^2 multiplicado por la probabilidad de ese suceso, puesto que las demás contribuciones no son negativas. Ahora bien, $E(Y) = V$. Dividiendo entre δ^2, se obtiene la desigualdad. Esta demostración muestra por qué intervienen el cuadrado y la positividad.

La desigualdad no supone una distribución normal. Su generalidad es una ventaja, pero la cota puede ser amplia. Un resultado $P \leq 0{,}20$ no significa que la probabilidad valga 0,20. La probabilidad verdadera puede ser mucho menor. Confundir una cota superior con una igualdad haría perder el significado mismo de la herramienta.

El suceso contiene las desviaciones mayores o iguales que el umbral indicado. Cuando X es discreta, la inclusión de la frontera puede importar. Hay que traducir la condición antes de calcular una probabilidad exacta o compararla con una cota.

6. Concentración de una media y ley de los grandes números

Aplicando la desigualdad a M_n, cuya varianza vale σ²/n, se obtiene P(|M_n − μ| ≥ δ) ≤ σ²/(nδ²). Para un δ positivo fijado, el miembro derecho tiende hacia cero cuando n aumenta. Así, la probabilidad de una desviación de al menos δ se vuelve arbitrariamente pequeña en el modelo. Es una forma de la ley de los grandes números.

La conclusión se refiere a una probabilidad, no a una evolución monótona de cada sucesión de medias observadas. Una nueva observación puede alejar temporalmente la media de μ. La ley tampoco dice que una serie futura compensará obligatoriamente una serie pasada. Después de varios fracasos independientes, la probabilidad de éxito en el siguiente ensayo sigue siendo p; no aumenta para «restablecer el equilibrio».

Para una frecuencia F_n de éxitos en un esquema de Bernoulli, μ = p y σ² = p(1 − p). La cota se convierte en P(|F_n − p| ≥ δ) ≤ p(1 − p)/(nδ²). Como p(1 − p) ≤ 1/4 para todo p entre cero y uno, se dispone de una cota uniforme 1/(4nδ²), incluso si p es desconocido.

Para asegurar una cota superior del 5 % para la probabilidad de una desviación de al menos 0,05, la cota uniforme exige n ≥ 1/(4 × 0,05 × 0,05²), es decir, dos mil. Se trata de un tamaño suficiente según esta desigualdad, no necesariamente del menor tamaño posible para una distribución particular. Si se busca 0,02 con el mismo riesgo acotado, el tamaño suficiente se convierte en doce mil quinientos.

Estos números se apoyan en ensayos independientes y una probabilidad constante. No garantizan la representatividad de una encuesta voluntaria ni la validez de un cuestionario. Un tamaño de muestra no corrige por sí solo un sesgo de selección. La precisión probabilística y la pertinencia del protocolo son dos exigencias distintas.

7. Qué se puede decir después de una observación

Antes de realizar los ensayos, F_n es una variable aleatoria. Después de realizarlos, su valor f es un dato. La cota de concentración proporciona un control sobre las posibles repeticiones del procedimiento. Por sí sola, no atribuye una probabilidad posterior al parámetro p después de observar f.

Se puede construir un intervalo alrededor de la frecuencia observada con una garantía de cobertura procedente de un método indicado. Esto significa que, en las repeticiones del protocolo conformes a las hipótesis, el procedimiento produce intervalos que contienen p con una frecuencia controlada. No debe reformularse sin otro marco como «este parámetro fijo tiene ahora tal probabilidad de estar en este intervalo».

Para repasar, a menudo basta con distinguir estimación, incertidumbre y garantía. Una frecuencia de 0,42 no establece p = 0,42 exactamente. Una cota de riesgo no establece que el procedimiento tendrá éxito en cada caso. Una confianza elevada dentro de un marco estadístico no elimina la posibilidad de un protocolo mal diseñado.

Cuando la decisión concierne a personas, a un sistema técnico o a un fenómeno sensible, el análisis estadístico es solo un elemento del razonamiento. También deben examinarse el coste de los errores, las restricciones y la validez de la medida. Esta guía no

transforma un método de concentración en consejo médico o financiero personalizado.

8. Diseñar un algoritmo con invariante y terminación

Un algoritmo es una sucesión de instrucciones cuyo resultado se puede explicar. No basta con que un programa muestre un número plausible. Se precisan sus entradas, su dominio, su salida, las etapas y las condiciones de parada. Un bucle debe acompañarse de una propiedad conservada, llamada invariante, y de un argumento que explique por qué termina cuando se solicita.

En una bisección, el invariante es que el intervalo actual contiene una solución, bajo las hipótesis de continuidad y cambio de signo utilizadas. Su longitud se divide entre dos en cada etapa. La terminación para una tolerancia positiva se deduce de esta disminución geométrica. La demostración no depende de un lenguaje informático particular.

Para encontrar el menor entero n tal que q^n ≤ a, con 0 < q < 1 y 0 < a < 1, se puede inicializar n en cero y una variable v en uno, y después multiplicar v por q e incrementar n mientras v > a. El invariante es v = q^n. La convergencia de q^n hacia cero asegura la terminación en aritmética exacta. Una implementación numérica también debe considerar el redondeo y los límites de representación.

La prueba de la condición debe corresponder al umbral deseado. Sustituir v > a por v ≥ a cambia la respuesta cuando la igualdad es posible. Es un error lógico, no un detalle estético. Probar un caso en el que el umbral se alcanza exactamente puede revelar un defecto invisible con valores ordinarios.

9. Simulación: explorar una distribución sin demostrarla

Una simulación de Bernoulli puede producir un valor uniforme U entre cero y uno y después contar un éxito si U < p. Repetir esta etapa n veces simula una serie en el modelo numérico elegido. Repetir series permite observar la distribución de los números de éxitos o de las frecuencias.

Los números utilizados generalmente son pseudoaleatorios: proceden de un mecanismo determinista inicializado mediante una semilla. Fijar esa semilla puede facilitar la reproducción de un estudio. Esto no convierte al generador en una fuente adecuada para todas las aplicaciones, en particular las que exigen propiedades de seguridad. Aquí sirve únicamente para una exploración pedagógica.

Una simulación permite conjeturar una relación, comprobar una fórmula o ver la dispersión. No demuestra una identidad válida para todos los parámetros. Si una probabilidad rara no aparece en ninguna de las mil series simuladas, no se puede concluir que sea nula. El número de series y la variabilidad deben acompañar a la conclusión.

También se puede estimar una integral mediante simulación. Para U uniforme en [0,1], la esperanza de U^2 vale la integral de x^2 en ese intervalo, es decir, un tercio. La media de muchos valores U^2 se acerca a esa cantidad en las condiciones del modelo. La varianza individual vale $1/5 - 1/9 = 4/45$; para diez mil observaciones independientes, la desviación típica teórica de la media es aproximadamente 0,00298. Se espera un resultado próximo a 0,33, pero no constituye una demostración del resultado exacto.

10. Estabilidad numérica y comprobaciones independientes

Una identidad exacta puede conducir a un cálculo numérico frágil. Restar dos números muy próximos puede hacer perder parte de las cifras significativas. Calcular factoriales enormes y después dividirlos puede superar las capacidades de una representación aunque el coeficiente binomial final siga siendo manejable. Por tanto, la organización de las operaciones también importa.

Para una distribución binomial con $0 < p < 1$, se puede partir de $q_0 = (1 - p)^n$ y calcular sucesivamente $q_{k+1} = q_k \times (n - k)/(k + 1) \times p/(1 - p)$. Esta recurrencia evita el cálculo repetido de factoriales. No resuelve todos los problemas: para valores muy grandes de n, q_0 puede volverse numéricamente demasiado pequeño y sería necesario otro tratamiento. Los casos $p = 0$ y $p = 1$ deben tratarse por separado.

Una comprobación útil consiste en verificar que todas las probabilidades son positivas y que su suma está próxima a uno dentro de la precisión disponible. Se puede comprobar la esperanza calculada a partir de la distribución y compararla con n p. Estos controles no sustituyen a una demostración del algoritmo, pero detectan errores de parámetro o índice.

Para la raíz cuadrada de dos, una iteración de Newton da $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ con $u_0 = 1$. Los primeros valores son 1,5 y después aproximadamente 1,41667. A partir de u_1, los valores permanecen por encima de $\sqrt{2}$ y decrecen. Si $e_n = u_n - \sqrt{2}$, se puede establecer $e_{n+1} = e_n^2/(2u_n)$, relación que explica la mejora rápida en este caso. No autoriza una garantía de convergencia de cualquier método de Newton para cualquier función.

11. Ejercicios resueltos y discusión

Ejercicio A. Dos grupos de diez y treinta personas tienen medias respectivas de doce y dieciséis. La media global vale (10 × 12 + 30 × 16)/40 = quince. El valor catorce, media no ponderada de las dos medias, atribuiría a los grupos el mismo peso pese a sus tamaños diferentes.

Ejercicio B. Una variable tiene esperanza diez y varianza cuatro. ¿Qué cota superior da Bienaymé-Chebyshev para una desviación de al menos cinco? La cota vale 4/25 = 0,16. Es correcto decir que la probabilidad es como máximo del 16 %. Sería incorrecto decir que vale exactamente el 16 % o que el 84 % de los valores está necesariamente distribuido uniformemente en el intervalo central.

Ejercicio C. Variables independientes con la misma distribución tienen una varianza de nueve. Para su media sobre cien observaciones, la varianza vale 0,09 y la desviación típica 0,30. Sobre cuatrocientas observaciones, la desviación típica vale 0,15. La disminución a la mitad corresponde a multiplicar el tamaño por cuatro, de acuerdo con la dependencia en raíz cuadrada.

Ejercicio D. Para una frecuencia de Bernoulli de parámetro p = 0,40 y n = mil, acotar superiormente la probabilidad de una desviación de al menos 0,05. Se encuentra 0,40 × 0,60/(1 000 × 0,05²) = 0,096. La cota uniforme daría 0,10. Conocer p mejora ligeramente esta cota superior, pero no da la probabilidad exacta.

Ejercicio E. Un programa inicializa v en uno y multiplica v por 0,5 mientras v ≥ 0,125. Se detiene en v = 0,0625 después de cuatro multiplicaciones. Para buscar el primer índice donde v ≤ 0,125, la prueba debería ser v > 0,125 y la parada se produciría después de tres multiplicaciones. El análisis del caso de igualdad revela la diferencia entre las preguntas.

Ejercicio F. Un centenar de voluntarios elige responder a una encuesta después de leer un mensaje sobre una dificultad que encuentran. ¿Se puede aplicar una garantía de muestreo independiente representativo a todos los usuarios? No sin justificación. Los voluntarios pueden tener características diferentes de quienes no responden. Aumentar el número de voluntarios no elimina automáticamente este sesgo.

12. Construir un repaso de síntesis

Para cada noción, prepare una definición, una propiedad con sus hipótesis, una demostración breve, un ejercicio y un contraejemplo. Para las probabilidades, el contraejemplo puede referirse a la independencia; para el análisis, a una continuidad ausente; para la geometría, a una intersección supuesta erróneamente; para los algoritmos, a una condición de bucle mal traducida.

Una buena síntesis no recita todas las fórmulas. Elige la que corresponde a la pregunta y explica por qué las demás serían insuficientes. Conserva la distinción entre demostración, aproximación y simulación. Por último, comprueba que la respuesta se refiere al problema inicial, con una precisión y una interpretación adecuadas.

Referencias de encuadre

Programa francés de la especialidad de matemáticas de Terminale, para los temas de concentración, ley de los grandes números y algoritmia; todas las situaciones y explicaciones son originales:
https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

NIST, referencias descriptivas sobre los indicadores de posición, consultadas para distinguir media y mediana sin reproducir sus formulaciones:
https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda351.htm

Anexos - Problemas largos, soluciones y estrategias de repaso

A. Estudiar una familia de funciones con un parámetro

Se considera f_a(x) = ln x − a x en los reales estrictamente positivos, donde a es un parámetro estrictamente positivo. Hay que distinguir la incógnita x del parámetro a. Durante el estudio de una función de la familia, a permanece fijado. La derivada es f_a'(x) = 1/x − a; es positiva antes de x = 1/a, nula en ese punto y negativa después.

Por tanto, la función admite un máximo en 1/a. Su valor vale ln(1/a) − 1, es decir, −ln a − 1. El límite en cero por valores positivos es menos infinito. El límite en más infinito también es menos infinito, porque el término lineal negativo domina al logaritmo para a fijado positivo. Estos límites y las variaciones permiten contar las soluciones de f_a(x) = 0.

Si a < 1/e, el máximo es estrictamente positivo. La continuidad y la monotonía estricta en cada uno de los dos intervalos de variación dan entonces dos soluciones distintas, una antes de 1/a y la otra después. Si a = 1/e, el máximo es nulo: la única solución es x = e. Si a > 1/e, el máximo es negativo y no existe ninguna solución. Se ha obtenido una clasificación de toda la familia, sin tener que calcular explícitamente cada raíz.

El razonamiento separa existencia y unicidad. La continuidad con valores de signos opuestos asegura una raíz; la monotonía estricta en el intervalo considerado asegura que no hay dos. El máximo y los límites permiten decidir en qué intervalos se aplican estos argumentos. Una simple lectura gráfica podría sugerir el resultado, pero no justificaría todos los parámetros.

La segunda derivada vale $-1/x^2$: todas las funciones de esta familia son estrictamente cóncavas. En el caso límite a = 1/e, la curva toca el eje en el máximo. Por tanto, el cambio de signo no es necesario para la existencia de una raíz. Este ejemplo completa el método de los valores intermedios al mostrar una situación en la que una búsqueda basada únicamente en signos opuestos no encontraría la solución.

Para repasar, retome el problema con ln x + a x, a positivo. La derivada se convierte en 1/x + a, siempre positiva. Los límites van de menos infinito a más infinito, por lo que la ecuación tiene una solución única. Un cambio de signo en la expresión modifica la estructura del problema; copiar la tabla anterior sin volver a calcular sería un error.

B. Una sucesión definida por una fracción y un paso al límite justificado

Se define $u_0 = 1$ y u_(n+1) = (2u_n + 3)/(u_n + 2). Antes de buscar un límite, hay que demostrar que todos los términos existen y controlar su dominio. La función φ(x) = (2x + 3)/(x + 2) está definida en el intervalo [1,√3], porque el denominador es positivo allí. Su derivada vale $1/(x + 2)^2$, por lo que es creciente en ese intervalo.

Se tiene φ(1) = 5/3 y φ(√3) = √3. Como 1 ≤ 5/3 ≤ √3, la función envía el intervalo a sí mismo. Así, una demostración por inducción prueba que todos los términos están comprendidos entre uno y √3. El cálculo que utiliza la función queda ahora garantizado en cada etapa.

La diferencia φ(x) − x vale $(3 - x^2)/(x + 2)$. Es positiva o nula en [1,√3]. Por tanto, u_(n+1) ≥ u_n: la sucesión es creciente y está acotada superiormente. Converge, pues, hacia un límite ℓ

perteneciente a ese intervalo. Solo en esta etapa la continuidad de φ permite escribir $\ell = \varphi(\ell)$.

La ecuación de punto fijo conduce a $\ell^2 = 3$. Las dos raíces algebraicas son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, pero el límite pertenece a $[1,\sqrt{3}]$. Por tanto, vale $\sqrt{3}$. Resolver la ecuación desde el principio habría proporcionado candidatos sin establecer la existencia del límite ni seleccionar el correcto.

Los primeros términos son $u_1 = 5/3$, $u_2 = 19/11$ y $u_3 = 71/41$, es decir, aproximadamente 1,6667, 1,7273 y 1,7317. Son compatibles con la demostración, pero no la sustituyen. Una serie de valores aparentemente estabilizados no bastaría para justificar una convergencia en todas las etapas siguientes.

Una ampliación puede acotar superiormente la diferencia entre imágenes mediante una constante menor que uno en el intervalo. La derivada es allí como máximo 1/9, lo que sugiere una contracción fuerte. Esta técnica supera la necesidad principal del ejercicio; debe presentarse como complemento. La solución al nivel de Terminale ya se apoya en la invariancia, la monotonía, la acotación superior y la continuidad.

C. Una optimización con restricción geométrica

Una placa rectangular ficticia debe tener un área de 48 unidades cuadradas. Se busca el rectángulo de perímetro mínimo entre aquellos cuyos lados son estrictamente positivos. Si un lado vale x, el otro vale 48/x y el perímetro es $P(x) = 2x + 96/x$ para x positivo. El dominio forma parte del modelo; los valores nulos y negativos no describen un rectángulo admisible.

La derivada vale $2 - 96/x^2$. Se anula para $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Es negativa antes de ese valor y positiva después. Por tanto, el mínimo global se alcanza para un cuadrado, cuyos dos lados valen $4\sqrt{3}$ y cuyo perímetro es $16\sqrt{3}$. Los límites infinitos en los dos

extremos del dominio son coherentes con el resultado, pero la tabla de variaciones ya basta para establecer el mínimo.

Una demostración sin derivada utiliza la desigualdad $x + 48/x \geq 2\sqrt{48}$ para x positivo, obtenida desarrollando un cuadrado elegido adecuadamente. La igualdad exige $x = 48/x$. Las dos vías establecen el mismo resultado; la segunda puede aclarar la simetría del problema, mientras que la primera se adapta fácilmente a otras funciones de coste.

Supongamos ahora que un lado debe ser al menos diez. El dominio se convierte en $x \geq 10$. Como diez es mayor que $4\sqrt{3}$, la función es creciente allí y el mínimo restringido se encuentra en $x = 10$, con el otro lado igual a 4,8. El rectángulo óptimo ya no es un cuadrado. Una conclusión memorizada sin considerar el dominio daría una respuesta inadmisible.

Por último, si los lados representan dimensiones reales, el espesor, los márgenes, el coste de los materiales y las restricciones de fabricación pueden modificar el objetivo. El problema matemático es exacto en su definición; su aplicación exige comprobar que esa definición responde a la necesidad. Una optimización no elige por sí misma el criterio adecuado.

D. Una probabilidad de decisión y sus hipótesis

Un sistema ficticio realiza una tarea cuando funcionan dos componentes independientes, cada uno con probabilidad 0,90. Si ambos son indispensables, la probabilidad de funcionamiento del sistema vale 0,81. Si basta uno solo y el modelo de respaldo está correctamente representado por el suceso «al menos uno funciona», vale $1 - 0{,}10^2 = 0{,}99$.

Estos resultados no son dos estimaciones competidoras de un mismo montaje. Los sucesos de funcionamiento son diferentes. La primera configuración corresponde a una intersección; la segunda,

al complemento del fallo de ambos. Por tanto, identificar el papel de los componentes precede al cálculo de las probabilidades.

La independencia también es una hipótesis importante. Si los componentes dependen de una misma alimentación que puede fallar, sus estados ya no son necesariamente independientes. Un cálculo que conserva 0,99 sin considerar esta causa común puede sobreestimar la fiabilidad. El problema no se corrige modificando arbitrariamente los decimales; hay que revisar el modelo.

Para un protocolo de diez ensayos independientes de probabilidad de éxito 0,90, la probabilidad de diez éxitos vale $0{,}90^{10}$, aproximadamente 34,9 %. Por tanto, una alta probabilidad en cada ensayo no implica certeza de éxito de toda la serie. La probabilidad de al menos un fracaso vale aproximadamente 65,1 %. Estos resultados no contradicen el hecho de que la esperanza del número de éxitos sea nueve.

Se puede explicar esta distinción comparando tres preguntas: éxito de un ensayo, número medio de éxitos y éxito de todos los ensayos. Utilizan los mismos parámetros, pero describen sucesos o indicadores diferentes. Una redacción rigurosa indica cuál trata y no utiliza un resultado para responder a las tres.

E. Geometría y optimización de una distancia

En un sistema de referencia ortonormal, se fija un punto $M = (2,-1,3)$ y una recta se describe mediante $H(t) = (t, t, 0)$. La distancia al cuadrado vale $D(t) = (t - 2)^2 + (t + 1)^2 + 9 = 2t^2 - 2t + 14$. Estudiar la derivada da $D'(t) = 4t - 2$, por lo que hay un mínimo en $t = 1/2$.

El punto más próximo es $H = (1/2,1/2,0)$. La distancia al cuadrado vale 13,5 y la distancia $\sqrt{13{,}5}$. El vector $MH = (-3/2,3/2,-3)$ tiene un producto escalar nulo con el vector director $(1,1,0)$. Por tanto, el método algebraico de optimización recupera la proyección

ortogonal y la condición geométrica proporciona una comprobación independiente.

Si el problema se refiere únicamente al segmento con t entre uno y dos, el punto t = 1/2 no es admisible. La función D es creciente en ese segmento; el mínimo se alcanza allí para t = 1, en el punto (1,1,0). La distancia al cuadrado vale catorce. Un valor mínimo en una recta no responde automáticamente a la pregunta sobre un segmento.

El interés de trabajar con la distancia al cuadrado es que la raíz cuadrada es creciente en los números positivos: minimizar D equivale a minimizar √D. Así se simplifican los cálculos sin cambiar el objetivo. Esta justificación debe darse en lugar de suponer que se puede eliminar cualquier función exterior de un problema de optimización.

F. Demostrar una desigualdad y reconocer los casos de igualdad

Para todo x positivo, se quiere establecer $x \ln x - x + 1 \geq 0$. Definamos $g(x) = x \ln x - x + 1$. Su derivada es $\ln x$. Es negativa en $]0,1[$, nula en uno y positiva en $]1,+\infty[$. Por tanto, la función admite un mínimo global en uno y $g(1) = 0$. La desigualdad queda demostrada; la igualdad solo se produce para $x = 1$.

La segunda derivada vale $1/x$, positiva. También se puede interpretar el resultado mediante la convexidad de $x \ln x$: su tangente en uno tiene como ecuación $y = x - 1$ y la curva permanece por encima. Las dos demostraciones expresan aspectos del mismo razonamiento. La primera utiliza las variaciones y la segunda una propiedad geométrica de las funciones convexas.

La condición $x > 0$ es indispensable para definir el logaritmo. Se podría estudiar una extensión continua en cero de $x \ln x$, pero esa

extensión debe construirse e indicarse; no puede utilizarse silenciosamente en la demostración inicial. Los dominios no son precauciones de presentación: determinan dónde existen los objetos.

Reconocer el caso de igualdad suele ser esencial en una optimización. Una cota inferior sin condición de alcance no siempre basta para designar una solución. Aquí se alcanza la cota cero y la unicidad se deduce de la variación estricta a ambos lados. Una buena solución distingue los tres hechos: la cota, su alcance y la unicidad.

G. Preparar una resolución larga en varias etapas

Para un ejercicio de síntesis, comience escribiendo las dependencias: ¿qué pregunta utiliza qué resultado anterior? Un cálculo de límite puede permitir establecer un signo, que permite una existencia de raíz, que permite después una acotación. Si se admite una pregunta intermedia, a veces se puede utilizar para continuar, señalando claramente qué queda sin demostrar.

Conserve los valores exactos cuando las etapas siguientes los utilicen. Un redondeo demasiado temprano puede desplazar un umbral entero o transformar una diferencia muy pequeña. Presente la aproximación al final, con un símbolo adecuado. Cuando aparezcan varias soluciones algebraicas, vuelva al dominio y a las condiciones del problema para decidir cuáles son admisibles.

Si utiliza una herramienta de cálculo, anote qué ha hecho realmente: evaluación, trazado, resolución aproximada o simulación. Una gráfica que parece mostrar una intersección única no es una demostración de unicidad. Una lista de diez términos no es una demostración de convergencia. La herramienta puede orientar la elección de una demostración y comprobar un

resultado; no transforma una observación en una proposición general.

H. Repasar con errores explicados

Construya un cuaderno breve de errores clasificados: dominio olvidado, implicación invertida, hipótesis ausente, condición de bucle, mala traducción de un suceso, confusión entre punto y vector, redondeo temprano. Para cada error, escriba un ejemplo incorrecto y su corrección justificada. El objetivo es reconocer la estructura del error en otro ejercicio, no memorizar solamente una respuesta.

Alterne problemas en los que una técnica familiar funciona con problemas en los que sería inadecuada. Para una distribución binomial, compare extracción con reposición y sin reposición. Para una optimización, compare un dominio abierto y un dominio restringido. Para una integral, compare área geométrica y acumulación con signo. Esta alternancia enseña a elegir en lugar de aplicar automáticamente.

Una evaluación personal útil consiste en repetir un ejercicio algunos días después de leerlo y después explicar por qué otro método posible es más largo o insuficiente. Así comprueba la reconstrucción del razonamiento. Una impresión de fluidez durante la lectura puede proceder de la solución ya presente y no debe confundirse con un dominio autónomo.

La guía ofrece ejemplos y métodos, no una promesa de resultados escolares. Una respuesta correcta también debe ser clara, pertinente y coherente: indique qué demuestra, compruebe que sus hipótesis corresponden al enunciado y concluya con el alcance exacto del resultado. Esta exigencia sigue siendo útil incluso cuando los cálculos ya son correctos.