

ORCHESTRATEUR

Mathematik - Definieren, beweisen, berechnen und deuten

Ein vertiefender Leitfaden, offline verfügbar

Lesen, verstehen, ein Kapitel wiederfinden

LAFAYETTE DIGITAL PRODUCTS

Inhalt

Die Einträge des Inhaltsverzeichnisses sind anklickbar. PDF-Lesezeichen führen zu Kapiteln und Abschnitten. Der Link am Ende jeder Seite führt hierher zurück.

Kapitel 1 - Vom Problem zum Beweis: Definitionsbereiche, Implikationen und Gegenbeispiele 8

Kapitel 2 - Folgen und vollständige Induktion: diskrete Veränderung verstehen 18

Kapitel 3 - Grenzwerte: Verhalten begründen, ohne Rechnung und Beweis zu verwechseln 27

Kapitel 4 - Stetigkeit: Existenz, Eindeutigkeit und Eingrenzungen beweisen 38

Kapitel 5 - Differentiation und Optimierung: von lokaler Veränderung zur Schlussfolgerung 48

Kapitel 6 - Konvexität: eine Kurve mit ihren Sehnen und Tangenten vergleichen 58

Kapitel 7 - Exponentialfunktionen, Logarithmen und Trigonometrie: umformen, ohne den Definitionsbereich zu verlieren 68

Kapitel 8 - Stammfunktionen und Integrale: eine Aufsummierung messen und eine Näherung prüfen 78

Kapitel 9 - Differentialgleichungen: eine Veränderung mit ihrer Änderungsrate verbinden 87

Kapitel 10 - Abzählen, Wahrscheinlichkeit und Binomialverteilung 97

Kapitel 11 - Geometrie im Raum: Vektoren, Ebenen und Abstände 110

Kapitel 12 - Statistik, Konzentration und algorithmische Methoden 122

Anhänge - Vertiefende Probleme, ausgearbeitete Lösungen und Lernstrategien 136

Mathematik - Definieren, beweisen, berechnen und deuten

Ein Lernweg auf dem Niveau der französischen Terminale

Dieser Leitfaden entwickelt die wichtigsten mathematischen Werkzeuge des mathematischen Schwerpunktfachs im letzten Jahr der französischen allgemeinbildenden Oberstufe sowie die früher erworbenen Begriffe, die zu ihrem Verständnis nötig sind. Er verbindet Definitionen, Beweise, Verfahren und eigens entwickelte Aufgaben. Der offizielle Lehrplan bildet einen Bezugspunkt für den Umfang; sein Text wird nicht wiedergegeben, und daraus folgt keine Zusicherung, dass jede Regelung einer künftigen Prüfung vollständig abgedeckt wird. Vertiefungen werden gekennzeichnet, wenn sie über den grundlegenden Lernweg hinausgehen.

Das Ziel besteht darin, die Voraussetzungen für die Anwendung von Formeln zu erkennen, statt Formeln lediglich zu sammeln. Eine richtig berechnete Ableitung beantwortet für sich genommen noch kein Optimierungsproblem. Eine Binomialverteilung eignet sich nicht für jedes wiederholte Ziehexperiment. Eine räumliche Skizze beweist keinen Schnittpunkt. Jedes Thema verbindet deshalb die Bedeutung seiner Gegenstände mit einem Verfahren, dessen Schritte sich begründen lassen.

Zahlenbeispiele dienen dem Lernen und sind fiktiv, sofern sie nicht lediglich einen mathematischen Gegenstand beschreiben. Weder eine finanzielle Rendite noch ein medizinisches Ergebnis oder das tatsächliche Verhalten eines Produkts werden zugesichert. Anwendungen verdeutlichen einen Gedankengang und seine Grenzen. Sie ersetzen keine fachliche Prüfung einer sensiblen Entscheidung.

So nutzen Sie die zwölf Kapitel

Das erste Kapitel erläutert die mathematische Sprache und das Begründen. Die nächsten beiden behandeln Folgen und Grenzwerte. Stetigkeit, Differentiation und Konvexität bilden anschließend einen zusammenhängenden Werkzeugkasten für die Untersuchung von Funktionen. Das siebte Kapitel verbindet Exponentialfunktionen, Logarithmen und Trigonometrie; das achte behandelt Integrale, das neunte Differentialgleichungen. Wahrscheinlichkeit, räumliche Geometrie sowie Statistik und Algorithmen schließen den Lernweg ab.

Bei einer ersten Lektüre folgen Sie dieser Reihenfolge und rechnen die einfachen Beispiele selbst nach. Zum Wiederholen wählen Sie eine genaue Frage und suchen die Eigenschaft, von der ihre Antwort abhängt. Die Anhänge enthalten Probleme, die mehrere Werkzeuge verbinden. Sie wiederholen nicht bloß die Rechnungen der Kapitel, sondern zeigen, wie sich eine längere Lösung gliedern lässt und was sich bei veränderten Voraussetzungen ändert.

Arbeiten Sie mit Papier oder einer Möglichkeit, Notizen festzuhalten, auch wenn Sie den Leitfaden am Telefon lesen. Lesen Sie die Aufgabe, verdecken Sie die ausgearbeitete Lösung und schreiben Sie mindestens einen eigenen Versuch auf. Ein erklärter Fehler ist oft lehrreicher als eine Lösung, die sofort verständlich erscheint. Halten Sie den ersten Punkt fest, an dem Ihr Gedankengang nicht mehr begründet war, statt nur das abweichende Endergebnis zu notieren.

Darstellung, exakte Werte und Näherungen

Symbole werden in ihrem Zusammenhang definiert. Eine exakte Gleichheit und eine numerische Näherung erfüllen verschiedene Aufgaben: Ein Ausdruck wie ln 2 oder $\sqrt{3}$ kann Rundungsfehler vermeiden. Ein Intervall, eine Bedingung für den Definitionsbereich oder ein Anfangsindex gehört zum Ergebnis. Wird diese Angabe weggelassen, kann eine richtige Antwort zu einer falschen Aussage werden.

Ein Beweis begründet eine Aussage für jeden Wert im angegebenen Definitionsbereich. Ein Beispiel prüft nur einen Fall; ein einziges Gegenbeispiel genügt dagegen, um eine allgemeine Aussage zu widerlegen. Eine Simulation erkundet ein Modell, ersetzt aber keinen Beweis. Diese Unterscheidungen durchziehen den Leitfaden und sind ebenso wichtig wie rechnerische Sicherheit.

Zur Kontrolle einer Lösung suchen Sie nach einem unabhängigen Verfahren: Leiten Sie ab, um eine Stammfunktion zu prüfen; setzen Sie ein, um eine Differentialgleichung zu kontrollieren; verwenden Sie eine Gegenwahrscheinlichkeit, um ein Ereignis zu prüfen; oder setzen Sie einen berechneten Punkt in eine Ebenengleichung ein. Die Kontrolle soll nicht bloß diejenige Rechenoperation wiederholen, bei der der Fehler entstanden sein könnte.

Die Länge einer Erklärung garantiert weder Beherrschung noch eine Schulnote. Wählen Sie zur Arbeit mit diesem Leitfaden einen Begriff, rekonstruieren Sie den Gedankengang ohne Blick auf die Lösung und prüfen Sie anschließend Voraussetzungen und Rechnungen. Ziel ist die Übertragung eines Verfahrens auf ein neues Problem, nicht lediglich die Lektüre zusätzlicher Seiten.

Herkunft und Mitarbeit

LAFAYETTE DIGITAL PRODUCTS. Dieser eigenständige Leitfaden wurde mit Unterstützung von Codex (OpenAI) verfasst und ins Deutsche übersetzt. Die deutsche Fassung überträgt den vollständigen französischen Text anhand seiner korrigierten französischen und englischen Fassungen; sie ist keine gekürzte Zusammenfassung. Historische Hinweise und Quellenlinks bleiben erhalten. Die französische Ausgangsfassung wurde unabhängig redaktionell gelesen; daraus folgt keine Bewertung oder fachliche Zertifizierung der deutschen Übersetzung.

Der Bezug zur französischen Terminale beschreibt den didaktischen Rahmen, nicht die amtliche Anerkennung eines Lehrbuchs oder eine Zusicherung von Prüfungsergebnissen. Fiktive Anwendungen bleiben Lernbeispiele und liefern keine individuelle medizinische oder finanzielle Beratung.

Kapitel 1 - Vom Problem zum Beweis: Definitionsbereiche, Implikationen und Gegenbeispiele

Ziele: die Art des gesuchten Ergebnisses erkennen, eine Kontrolle von einem Beweis unterscheiden und Definitionsbereiche sowie Umformungen ausdrücklich angeben. Das anfängliche Grundlagenmodul ist hier genau einmal aufgenommen; die folgenden Kapitel vertiefen die einzelnen Problemfamilien.

Historischer Bezug - Hilbert: Voraussetzungen sichtbar machen

Im Jahr 1899 veröffentlichte David Hilbert die Grundlagen der Geometrie, eine axiomatische Darstellung der Geometrie. Dieser historische Bezug erinnert daran, dass eine vertraute Zeichnung nicht von der Pflicht entbindet, angenommene Beziehungen und bewiesene Eigenschaften auseinanderzuhalten. In diesem Kapitel gilt dieselbe Forderung für den Definitionsbereich einer Variablen und die Voraussetzungen einer Umformung: Eine Schlussfolgerung gilt nur unter den tatsächlich verwendeten Annahmen. Es handelt sich um einen didaktischen Vergleich; der Leitfaden stellt weder Hilberts Axiomensystem dar noch beansprucht er, Grundlagenfragen zu lösen.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hilbert/

1. Wissen, was begründet werden soll

Eine Rechnung kann einen Wert, eine Vermutung oder einen Beweis liefern: Diese Ergebnisse haben nicht denselben Status. Eine Beziehung für fünf Werte zu prüfen, legt ihre mögliche Richtigkeit nahe, beweist sie aber nicht für alle Zahlen. Ein Beweis erklärt, warum die Schlussfolgerung im gesamten angegebenen Definitionsbereich aus den Voraussetzungen folgt. Ein einziges Gegenbeispiel genügt dagegen, um eine allgemeine Aussage zu widerlegen.

Betrachten wir „für jede reelle Zahl x gilt $x^2 > x$“. Die Werte 2 und 3 erfüllen die Ungleichung, doch schon $x = 0$ widerlegt sie. Die reelle Zahl 1/2 liefert sogar $x^2 < x$. Das Problem liegt nicht in zu wenigen Rechnungen: Die Behauptung war zu weit gefasst. Um eine richtige Aussage zu finden, faktorisieren wir $x^2 - x = x(x - 1)$ und untersuchen dann das Vorzeichen auf den betreffenden Intervallen. So ergibt sich $x^2 > x$ für $x < 0$ oder $x > 1$.

Vor der Lösung eines Problems bestimmen Sie den Definitionsbereich, die gegebenen Informationen und die verlangte Antwortart: einen exakten Wert, eine Näherung, Existenz, Eindeutigkeit oder eine Eigenschaft für jeden Index. Diese Unterscheidungen lenken die Wahl des Verfahrens und verhindern, dass eine grafische Näherung als Beweis ausgegeben wird.

2. Implikation, Äquivalenz und Definitionsbereiche

Zwei Aussagen sind äquivalent, wenn jede die andere impliziert. Das Quadrieren einer Gleichheit kann eine Implikation erhalten, ohne eine Äquivalenz zu erhalten. Aus $x = 2$ folgt $x^2 = 4$; die Gleichung $x^2 = 4$ besitzt aber auch die Lösung $x = -2$. Wenn in einer Folge von Umformungen die Voraussetzungen für ihre Umkehrbarkeit angegeben werden, lassen sich zusätzliche Lösungen erkennen.

Die Division durch einen Ausdruck setzt voraus, dass er nicht null ist. Wer zur Lösung von $x(x-2)=0$ sofort durch x dividiert, entfernt die Lösung $x=0$. Die Nullproduktregel liefert unmittelbar $x=0$ oder $x=2$. Ebenso setzt ein Ausdruck mit $\ln(x)$ die Bedingung $x>0$ voraus. Der Definitionsbereich ist keine nachträglich hinzugefügte Vorsichtsmaßnahme, sondern gehört von Anfang an zum Problem.

Eine nützliche Gewohnheit besteht darin, Einschränkungen zu Beginn festzuhalten und die erhaltenen Lösungen anschließend in der ursprünglichen Gleichung zu prüfen. Diese abschließende Kontrolle ersetzt keinen Beweis dafür, dass alle Lösungen gefunden wurden; sie beseitigt aber diejenigen, die durch eine nicht umkehrbare Umformung hinzugekommen sind.

3. Eine Folge: diskrete Veränderung beschreiben

Eine Folge ordnet jedem ganzzahligen Index ihres Definitionsbereichs einen Wert u_n zu. Eine explizite Darstellung liefert u_n unmittelbar in Abhängigkeit von n; eine Rekursionsvorschrift berechnet einen Wert aus früheren Werten. Beide Beschreibungen können dieselbe Entwicklung darstellen, erleichtern aber unterschiedliche Fragen.

Es sei $u_0=1$ und $u_{n+1}=0{,}5\,u_n+2$. Die ersten Glieder lauten 1; $2{,}5$; $3{,}25$; $3{,}625$. Sie deuten einen Anstieg gegen 4 an, ohne ihn zu beweisen. Gesucht wird ein fester Wert L mit $L=0{,}5\,L+2$; daraus folgt $L=4$. Setzen wir $v_n=u_n-4$. Dann gilt $v_{n+1}=0{,}5\,v_n$, also $v_n=-3\times(0{,}5)^n$ und $u_n=4-3\times(0{,}5)^n$.

Diese Darstellung begründet die Beobachtungen. Weil $(0{,}5)^n$ streng positiv ist, gilt $u_n<4$. Außerdem ist $u_{n+1}-u_n=1{,}5\times(0{,}5)^n>0$: Die Folge ist monoton wachsend. Schließlich strebt $(0{,}5)^n$ gegen null, weshalb u_n gegen 4 strebt. Aus der

Berechnung einzelner Werte ist ein Beweis geworden, weil eine zugrunde liegende Struktur erkannt wurde.

4. Vollständige Induktion: das erste Glied nicht vergessen

Ein Induktionsbeweis umfasst einen Anfang, einen Induktionsschritt und eine Schlussfolgerung. Um im vorherigen Beispiel $u_n < 4$ zu zeigen, beginnen wir mit $u_0 = 1 < 4$. Aus $u_n < 4$ folgt $u_{n+1} = 0{,}5\, u_n + 2 < 0{,}5 \times 4 + 2 = 4$. Daher gilt die Eigenschaft für jede ganze Zahl $n \geq 0$.

Hier wird das positive Vorzeichen von 0,5 verwendet: Die Multiplikation einer Ungleichung mit einer negativen Zahl würde ihre Richtung umkehren. Nur zu schreiben „wir nehmen die Eigenschaft als wahr an“ und zu einer ähnlich aussehenden Aussage zu gelangen, bildet noch keinen Induktionsschritt. Es muss genau gezeigt werden, wie aus der Voraussetzung für n die Schlussfolgerung für n + 1 entsteht.

Vollständige Induktion ist kein Zirkelschluss. Der Anfang begründet einen Fall, ohne die allgemeine Schlussfolgerung vorauszusetzen; der Induktionsschritt beschreibt einen gültigen Übergang von jedem bereits begründeten Fall zum nächsten. Fehlt eines dieser Elemente, trägt das Argument nicht.

5. Ableiten, um Veränderung zu verstehen

Der Quotient $[f(x + h) - f(x)] / h$ beschreibt für h ungleich null eine mittlere Änderungsrate. Existiert sein Grenzwert für h gegen null, definiert dieser Grenzwert $f'(x)$. Geometrisch liefert die Ableitung die Tangentensteigung; in einem Ortsmodell kann sie die Geschwindigkeit darstellen. Die Einheit der Ableitung ist die Einheit von f, geteilt durch die Einheit von x.

Auf einem Intervall gibt das Vorzeichen der Ableitung unter den üblichen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen Auskunft über die

Monotonie. Die Nullstellen von f' allein reichen jedoch nicht aus, um ein globales Maximum zu bestimmen. Vorzeichen, Definitionsbereich und je nach Problem die Randpunkte müssen untersucht werden. Eine Stelle mit f' gleich null kann auch ein Minimum sein oder überhaupt keinem Extremum entsprechen.

Für eine zusammengesetzte Funktion g(u(x)) lautet die Ableitung g'(u(x)) × u'(x). Die Ableitung von e^(−2x) ist deshalb −2 e^(−2x) und nicht bloß e^(−2x). Häufig wird gerade der Faktor der inneren Funktion vergessen. Die Prüfung des erwarteten Verhaltens hilft: Eine fallende Exponentialfunktion muss eine negative Ableitung haben.

6. Unter einer Nebenbedingung optimieren

Ein Rechteck hat einen Umfang von 20 m. Für seine Seiten x und y gilt dann x + y = 10. Seine Fläche ist daher keine Funktion zweier unabhängiger Variablen: A(x) = x(10 − x), mit 0 ≤ x ≤ 10, wenn die entarteten Grenzfälle in die mathematische Untersuchung einbezogen werden.

Die Ableitung A'(x) = 10 − 2x ist vor 5 positiv und nach 5 negativ. Die größte Fläche beträgt A(5) = 25 m²; das zugehörige Rechteck ist ein Quadrat. Ein anderer Beweis ergibt sich aus A(x) = 25 − (x − 5)². Beide Zugänge passen zusammen: Der eine nutzt die Monotonie, der andere eine algebraische Eigenschaft. Geeignete Verfahren zu vergleichen, bereichert das Begründen, ohne einen künstlichen Gegensatz zu erzeugen.

Die Antwort muss anschließend gedeutet werden. Verlangte eine zusätzliche Nebenbedingung eine Breite von weniger als 3 m, wäre das vorherige Maximum nicht mehr zulässig. Das ideale Problem zu lösen und danach die tatsächlichen Einschränkungen zu vergessen, hieße eine andere Frage zu beantworten.

7. Existenz und Eindeutigkeit sind verschiedene Ergebnisse

Betrachten wir $f(x) = x^3 + x - 1$. Die Funktion ist auf $[0; 1]$ stetig, mit $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$. Der Zwischenwertsatz garantiert daher mindestens eine Lösung von $f(x) = 0$ in diesem Intervall. Weil $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ gilt, ist die Funktion streng monoton wachsend: Die Lösung ist eindeutig.

Stetigkeit begründet die Existenz; strenge Monotonie begründet die Eindeutigkeit. Diese Eigenschaften dürfen nicht verwechselt werden. Eine stetige Funktion kann denselben Wert mehrmals annehmen. Eine streng wachsende Funktion kann auf einem gegebenen Intervall den verlangten Wert verfehlen.

Anschließend liefert das Bisektionsverfahren eine Eingrenzung. Hier gilt $f(0{,}5) = -0{,}375$ und $f(0{,}75) = 0{,}171875$: Die Lösung liegt in $[0{,}5; 0{,}75]$. Jeder Schritt erhält einen Vorzeichenwechsel und halbiert die Länge des Intervalls. Eine Eingrenzung mit begründetem Verfahren ist aussagekräftiger als eine lange, unbegründete Dezimalzahl.

8. Logarithmen und die Deutung einer Schwelle

Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus sind auf den passenden Definitionsbereichen Umkehrfunktionen. Zur Lösung von $e^{-2t} = 0{,}1$ logarithmieren wir positive Größen: $-2t = \ln(0{,}1) = -\ln(10)$, also $t = \ln(10)/2$, ungefähr 1,1513 in der Zeiteinheit des Modells.

Die Lösung einer Gleichung ist nicht immer dasselbe Ergebnis wie die Schwelle einer Ungleichung. Lautet die Forderung $e^{-2t} \leq 0{,}1$ für $t \geq 0$, ergibt sich $t \geq \ln(10)/2$, weil diese Exponentialfunktion fällt. Die Gleichung $\ln(a + b) = \ln(a) + \ln(b)$ ist im Allgemeinen falsch: Der Logarithmus verwandelt ein Produkt positiver Faktoren in eine Summe, nicht eine Summe in eine Summe.

Für unsere Folge führt die Forderung 4 − u_n < 0,01 zu 3 × (0,5)^n < 0,01. Der erste zulässige Index ist n = 9: Der Abstand beträgt bei n = 8 noch 0,01171875 und bei n = 9 dann 0,005859375. Weil der Index ganzzahlig ist, muss ein mit Logarithmen berechneter reeller Wert noch richtig gedeutet werden.

9. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Gegenbeispiel. „Wenn $a^2 = b^2$, dann a = b.“ **Lösung:** a = 1 und b = −1 widerlegen die Aussage. Über den reellen Zahlen lautet die richtige Schlussfolgerung a = b oder a = −b; sie ergibt sich durch Faktorisieren von $a^2 - b^2$.

B - Monotonie. Untersuchen Sie $f(x) = x^3$ über den reellen Zahlen. **Lösung:** $f'(x) = 3x^2 \geq 0$; trotz f'(0) = 0 ist die Funktion streng monoton wachsend. Man kann auch zwei Kubikwerte direkt vergleichen. Eine Ableitung, die an einer einzigen Stelle null ist, bedeutet noch kein Extremum.

C - Stammfunktion. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von 2x über den reellen Zahlen und anschließend das Integral von 2x zwischen 0 und 3. **Lösung:** $F(x) = x^2$ ist geeignet, denn F' = 2x. Das Integral ist F(3) − F(0) = 9. Eine zu F addierte Konstante verändert diese Differenz nicht.

D - Definition. Berechnen Sie den Median von 2; 3; 8; 11. **Lösung:** Die Liste ist geordnet und enthält vier Werte; der übliche Median ist das Mittel der beiden mittleren Werte, (3 + 8)/2 = 5,5. Das arithmetische Mittel der Reihe beträgt 6: Die Kennzahlen beantworten nicht genau dieselbe Frage.

10. Ein Verfahren wiederholen, nicht nur ein Ergebnis

Fragen Sie bei jeder Aufgabe: Welcher Definitionsbereich, welche Eigenschaft, welche Voraussetzungen, welche Umformung und welche Schlussfolgerung? Die Rechnung mit anderen Werten zu wiederholen, prüft, ob das Verfahren unabhängig von einem auswendig gelernten Beispiel ist. Laut zu erklären, warum ein Schritt erlaubt ist, macht oft ein noch unsicheres Verständnis sichtbar.

Eine gut lesbare Lösung unterscheidet gegebene Informationen, Begründung und Deutung. Verknüpfungen wie „weil“, „also“ und „umgekehrt“ müssen einem wirklichen logischen Zusammenhang entsprechen. Führen Sie ein Fehlerheft mit einer Korrektur und einem Gegenbeispiel; eine Formelsammlung allein zeigt nicht, wann die Formeln anzuwenden sind.

11. Quantoren: genau sagen, was der Beweis behauptet

„Für jedes x gibt es ein y“ und „es gibt ein y, sodass für jedes x“ bedeuten nicht dasselbe. Wenn jede Schülerin oder jeder Schüler ein passendes Buch finden kann, darf das Buch von Person zu Person wechseln. Damit ist nicht bewiesen, dass ein und dasselbe Buch allen passt. In der Mathematik tritt die Unterscheidung bei Funktionseigenschaften auf: Für jede reelle Zahl x gibt es eine reelle Zahl y mit $y > x$; es gibt aber keine reelle Zahl y, die größer als jede reelle Zahl x ist. Die erste Aussage wird durch die Wahl $y = x + 1$ bewiesen; die zweite wird durch $x = y + 1$ widerlegt, gleichgültig welcher Kandidat y vorgeschlagen wird.

Um „alle Glieder sind positiv“ zu verneinen, genügt die Behauptung, dass mindestens ein Glied nicht positiv ist. Die Verneinung von $u_n > 0$ lautet $u_n \leq 0$, nicht $u_n < 0$. Die Gleichheit kann das fehlende Gegenbeispiel sein. Umgekehrt bedeutet die Verneinung von „es gibt eine Lösung“, dass kein Wert

im Definitionsbereich die Gleichung erfüllt. Diese Behauptung verlangt einen Beweis für den gesamten Definitionsbereich; eine erfolglose Suche am Taschenrechner ist kein solcher Beweis.

Führen Sie beim Schreiben den beliebig gewählten Gegenstand ein: „Sei x eine streng positive reelle Zahl.“ Diese Wahl legt keinen bestimmten Wert fest und ermöglicht den Beweis einer allgemeinen Eigenschaft im Definitionsbereich. Hängt eine Konstante von x ab, sagen Sie es ausdrücklich. Quantoren verhindern, dass eine für einen Fall passende Konstruktion zu einer einheitlichen Zusicherung wird. Diese Genauigkeit ist für Konvergenzschwellen, Wahrscheinlichkeiten und Optimierungsprobleme nützlich.

12. Zwischen direktem Beweis, Kontraposition und Widerspruch wählen

Ein direkter Beweis beginnt mit den Voraussetzungen und leitet die Schlussfolgerung her. Um zu zeigen, dass aus $x > 1$ die Ungleichung $x^2 > x$ folgt, schreiben wir $x^2 - x = x(x - 1)$ und stellen fest, dass beide Faktoren positiv sind. Die Kontraposition beschreibt denselben logischen Zusammenhang in anderer Richtung: Wenn $x^2 \leq x$, dann $x \leq 1$. Dabei müssen die genaue Verneinung und der Definitionsbereich erhalten bleiben. Die Umkehrung „wenn $x^2 > x$, dann $x > 1$“ ist falsch, weil $x = -1$ die Voraussetzung, aber nicht die Schlussfolgerung erfüllt.

Ein Widerspruchsbeweis nimmt vorübergehend die Verneinung der Schlussfolgerung an und sucht einen Widerspruch zu den Voraussetzungen oder zu einer bereits begründeten Eigenschaft. Eine überraschende Aussage reicht nicht. Um etwa zu zeigen, dass es keine größte natürliche Zahl gibt, nehmen wir an, eine solche Zahl N existiere. Die Zahl $N + 1$ ist weiterhin natürlich und größer als N: Das ist der gesuchte Widerspruch. Der Gedankengang

erklärt zugleich das Ergebnis, weil er zu jedem vorgeschlagenen Maximum einen größeren Kandidaten konstruiert.

Eine Lösung kann mehrere Verfahren verwenden, doch jeder Übergang muss erkennbar sein. Mit „wir nehmen die Eigenschaft als wahr an“ zu beginnen, ohne anzugeben, ob eine Induktion, eine Kontraposition oder ein Widerspruchsbeweis vorbereitet wird, lässt die Lesenden über die Rolle der Annahme im Unklaren. Ein gelungener Beweis erklärt diese Rolle, statt eine dem Autor bereits vertraute Folge von Rechnungen vorzulegen.

Zusatzaufgabe. Betrachten Sie für reelle Zahlen a und b die Aussage: „Wenn ab = 0, dann a = 0.“ Finden Sie eine genaue Korrektur. **Lösung:** a = 2 und b = 0 liefern ein Gegenbeispiel. Die gültige Schlussfolgerung lautet a = 0 oder b = 0. Wird b ≠ 0 zu den Voraussetzungen hinzugefügt, wird die Schlussfolgerung a = 0 durch Division richtig. Die Eigenschaft war nicht völlig abwegig; ihr fehlte eine wesentliche Voraussetzung oder Alternative. Aussagen zu verbessern, vertieft das Verständnis stärker, als einen Satz lediglich als wahr oder falsch einzuordnen.

Kapitel 2 - Folgen und vollständige Induktion: diskrete Veränderung verstehen

Historischer Bezug - Fibonacci: eine Rekursion entsteht aus Annahmen

Leonardo von Pisa, bekannt als Fibonacci, verfasste 1202 den Liber abaci. Darin steht ein fiktives Problem zur Vermehrung von Kaninchen, das mit der heute nach ihm benannten Folge verbunden ist. Für dieses Kapitel ist der Übergang von Annahmen zu einer Rekursionsvorschrift wichtig, gefolgt von der Untersuchung dessen, was sich aus dieser Vorschrift schließen lässt. Ein solches Modell wird nicht dadurch zu einer biologischen Vorhersage, dass seine ersten Glieder leicht zu berechnen sind. Dieses historische Beispiel bedeutet weder, dass Fibonacci jede Folge dieser Form erfunden habe, noch, dass jedes Naturphänomen dieser Rekursion folge.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fibonacci/

1. Den Index und die Veränderungsregel bestimmen

Eine Folge ist eine Funktion auf einer Menge ganzer Zahlen, häufig der natürlichen Zahlen. Der Index n ist nicht der Wert u_n: Er bezeichnet eine Stufe. Beschreibt u_n eine Größe nach n Vorgängen, bezeichnet u_0 ihren Zustand vor dem ersten Vorgang. Ein Fehler am Ausgangspunkt verschiebt die gesamte Deutung, ohne dass die Rechnungen unbedingt sichtbar falsch werden. Beginnen Sie mit einem Satz, der den Index und die Anfangsbedingung erklärt.

Eine explizite Definition wie u_n = 3n + 2 ermöglicht es, das Glied mit dem Index 100 direkt zu berechnen. Eine rekursive Definition wie u_(n+1) = 0,8u_n + 5 benötigt einen Anfangswert und baut die Veränderung schrittweise auf. In der zweiten Darstellung darf u_n nicht durch n ersetzt werden: u_(n+1) = 0,8n + 5 würde eine andere Folge definieren. Die Regel wirkt auf den aktuellen Wert, nicht unmittelbar auf die Nummer der Stufe.

Eine Tabelle der ersten Glieder und ein Diagramm können ein Muster nahelegen. Sie helfen, ein mögliches Vorzeichen oder eine Schranke zu erkennen, bilden aber keinen Beweis für unendlich viele Glieder. Rundungen am Taschenrechner können außerdem eine langsame Divergenz oder eine sehr kleine Schwankung verdecken. Beobachtungen lenken deshalb die Untersuchung; algebraische Argumente und Sätze begründen das Ergebnis.

2. Arithmetische Folgen: eine Konstante addieren

Eine arithmetische Folge erfüllt u_(n+1) = u_n + r, wobei r eine konstante Differenz ist. Mit dem Anfangsglied u_0 lautet ihre explizite Darstellung u_n = u_0 + nr. Dies lässt sich durch vollständige Induktion beweisen: Der Fall n = 0 ist unmittelbar erfüllt; gilt die Formel für den Index n, folgt u_(n+1) = u_0 + nr + r = u_0 + (n + 1)r. Die Eigenschaft geht somit auf das nächste Glied über.

Das Vorzeichen von r bestimmt die Veränderungsrichtung: Eine positive Differenz führt zu strengem Wachstum, eine negative zu strengem Fallen, eine Differenz von null zu einer konstanten Folge. Ein gleichbleibender Zuwachs um 5 Einheiten unterscheidet sich von einem Zuwachs um 5 %. Im ersten Fall addieren wir 5, im zweiten multiplizieren wir mit 1,05. Diese Unterscheidung muss vor der Suche nach einer Formel verstanden werden, insbesondere wenn die Alltagssprache beide Situationen als „regelmäßigen Zuwachs“ bezeichnet.

Die Summe von N aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Folge ist N-mal das Mittel des ersten und letzten Glieds. Von u_0 bis einschließlich u_n sind es n + 1 Glieder; ihre Summe beträgt (n + 1)(u_0 + u_n)/2. Ein Beweis schreibt die Summe in aufsteigender und absteigender Reihenfolge auf: Jedes Paar entsprechender Glieder hat dieselbe Summe u_0 + u_n. Dieser Beweis erklärt den Faktor 1/2 und verhindert die Verwechslung des letzten Index mit der Gliederzahl.

Fiktives Beispiel: Eine Längenreihe lautet 4; 7; 10; ...; 34. Die Differenz beträgt 3. Aus 4 + 3n = 34 ergibt sich n = 10, also gibt es elf Glieder und nicht zehn. Die Summe ist 11×(4 + 34)/2 = 209. Kleine Fälle nachzuprüfen, bietet eine nützliche Absicherung: Für n = 0 muss die Formel u_0 ergeben und nicht null.

3. Geometrische Folgen: mit einer Konstante multiplizieren

Eine geometrische Folge erfüllt u_(n+1) = qu_n. Beginnt sie beim Index null und gilt q ≠ 0, lautet ihre explizite Darstellung u_n = u_0q^n für n ≥ 0. Bei q = 0 bleibt das gegebene Anfangsglied u_0 erhalten; anschließend gilt u_n = 0 für jedes n ≥ 1. Die gesonderte Behandlung dieses Falls vermeidet den Ausdruck 0^0. Der konstante Quotient q kann positiv, null oder negativ sein; sein Wert und das Vorzeichen von u_0 müssen untersucht werden, bevor eine Veränderungsrichtung angegeben wird. Für u_0 > 0 und q > 1 wächst die Folge. Für u_0 > 0 und 0 < q < 1 fällt sie gegen null. Ein negativer Quotient führt bei u_0 ungleich null zu wechselnden Vorzeichen.

Eine Abnahme um 20 % auf jeder Stufe entspricht q = 0,80. Nach zwei Stufen wurde der Wert mit $0{,}80^2 = 0{,}64$ multipliziert: Die gesamte Abnahme beträgt 36 % und nicht 40 %. Aufeinanderfolgende Prozentsätze beziehen sich auf verschiedene Ausgangswerte. Eine fiktive Anfangsgröße von 60 Einheiten wird zunächst zu 48 und anschließend zu 38,4. Dies ist eine

Rechenaufgabe, keine Vorhersage einer wirtschaftlichen, biologischen oder medizinischen Entwicklung.

Für q ungleich 1 beträgt die Summe 1 + q + ... + q^n genau (1 − q^(n+1))/(1 − q). Zum Beweis multiplizieren wir die Summe S mit q und subtrahieren anschließend: S − qS = 1 − q^(n+1). Die Division ist gültig, weil q ≠ 1. Für q = 1 ist die Summe einfach n + 1. Diesen Fall abzutrennen, ist keine Formalität: Die vorherige Formel hätte einen Nenner von null.

Die Summe der Glieder von u_0 bis u_n lautet folglich u_0(1 − q^(n+1))/(1 − q). Für u_0 = 2 und q = 1/2 ergeben die ersten vier Glieder 2 + 1 + 0,5 + 0,25 = 3,75. Die Formel liefert 2(1 − (1/2)^4)/(1/2) = 3,75. Diese Kontrolle bestätigt sowohl die Gliederzahl als auch den Exponenten n + 1.

4. Vollständige Induktion: eine übertragbare Eigenschaft formulieren

Ein Induktionsbeweis behandelt eine Aussage P(n) für jede ganze Zahl eines Definitionsbereichs. Er besteht aus einem Anfang, einem Induktionsschritt und einer Schlussfolgerung. Im Induktionsschritt wählen wir eine beliebige ganze Zahl n im Definitionsbereich, nehmen P(n) an und beweisen P(n + 1). Wir setzen nicht zugleich die Schlussfolgerung für jeden Index voraus. Die Annahme hat eine lokale und bedingte Funktion.

Manchmal muss die Form von P(n) verstärkt werden. Um allein u_n < 5 zu beweisen, kann es nützlicher sein, 0 ≤ u_n < 5 zu zeigen, weil eine untere Schranke anschließend das Ziehen einer Quadratwurzel oder die Erhaltung eines Vorzeichens erlaubt. Eine Induktionsvoraussetzung zu verstärken, bedeutet nicht, beliebig hinzuzufügen, was eine Rechnung erleichtert: Jeder Bestandteil muss sowohl am Anfang als auch beim Übergang zum nächsten Index bewiesen werden.

Hier ist ein eigens ausgearbeiteter Beweis einer Identität: Für jedes $n \geq 0$ gilt $1 + 3 + \ldots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Beim Index null sind beide Seiten gleich 1. Wir nehmen an, die Identität gelte beim Index n. Beim Index n + 1 addieren wir das Glied $2n + 3$: $(n + 1)^2 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = (n + 2)^2$. Die Gleichheit geht auf den nächsten Index über. Eine Zeichnung ineinanderliegender Quadrate kann dieses Wachstum veranschaulichen, doch der algebraische Beweis umfasst jeden Index.

Häufige Fehler sind ein Induktionsanfang beim falschen Index, eine Rechnung, die die Voraussetzung nie verwendet, und eine Schlussfolgerung ohne angegebenen Definitionsbereich. Eine Eigenschaft wie 2^n ≥ n kann einen kurzen Beweis haben; das rechtfertigt nicht, seine Stufen auszulassen. Die Darstellung darf knapp und dennoch vollständig sein: Oft genügt es, den Anfang zu kennzeichnen und den Übergang ausdrücklich zu zeigen.

5. Veränderungen ohne schematisches Verfahren untersuchen

Zum Vergleich zweier aufeinanderfolgender Glieder können wir u_(n+1) − u_n untersuchen. Eine positive Differenz bei jedem Index begründet Wachstum. Sind sämtliche Glieder streng positiv, können wir auch den Quotienten u_(n+1)/u_n betrachten und mit 1 vergleichen. Die Positivität ist für diese zweite Strategie wesentlich; ein negativer Quotient oder ein Glied von null verlangt eine andere Untersuchung.

Eine zugeordnete Funktion kann ebenfalls helfen. Für u_n = f(n) gilt: Ist f auf einem Intervall monoton wachsend, das die betrachteten Indizes enthält, dann wächst auch die Folge. Die Umkehrung ist keine allgemeine Regel: Eine Funktion kann zwischen ganzen Zahlen schwanken, ohne das Wachstum ihrer Werte an den ganzzahligen Stellen zu verhindern. Ersetzen Sie

deshalb nicht eine Folge durch eine Funktion und behaupten ohne Begründung eine Äquivalenz.

Betrachten wir u_n = n/(n + 1) für n ≥ 0. Die Differenz beträgt (n + 1)/(n + 2) − n/(n + 1) = 1/[(n + 1)(n + 2)] > 0. Die Folge wächst und bleibt streng unter 1. Die Darstellung u_n = 1 − 1/(n + 1) bietet einen zweiten, unmittelbaren Zugang. Die beiden Verfahren zeigen verschiedene Strukturen: einen lokalen Vergleich benachbarter Glieder und einen ausdrücklich angegebenen Abstand zum Grenzwert.

6. Affine Rekursionen: den Ursprung der Werte verschieben

Für u_(n+1) = au_n + b mit a ≠ 1 erfüllt der feste Wert L die Gleichung L = aL + b, also L = b/(1 − a). Die Substitution v_n = u_n − L verwandelt die Beziehung in v_(n+1) = av_n. Damit gilt u_n = L + (u_0 − L)a^n. Die neue Variable misst den Abstand vom Fixpunkt und macht die geometrische Struktur sichtbar.

Es sei u_0 = 10 und u_(n+1) = 0,75u_n + 3. Der Fixpunkt ist 12, und u_n = 12 − 2(0,75)^n. Die Folge wächst, bleibt unter 12 und konvergiert gegen 12. Wählen wir bei derselben Vorschrift u_0 = 14, ergibt sich 12 + 2(0,75)^n: eine Abnahme gegen denselben Grenzwert. Die Vorschrift allein bestimmt somit nicht immer die Veränderungsrichtung; auch die Anfangsbedingung ist dafür maßgeblich.

Bei a = −1/2 und L = 4 wechselt der Abstand sein Vorzeichen, während sein Betrag abnimmt. Eine Folge kann konvergieren, ohne monoton zu sein. Bei a = 2 verdoppelt sich ein anfänglich von null verschiedener Abstand auf jeder Stufe und entfernt sich vom Fixpunkt. Falls jedoch u_0 = L gilt, ist die Folge konstant. „Aus a > 1 folgt immer Divergenz“ würde diesen Ausnahmefall übersehen. Das Kapitel über Grenzwerte wird diese Unterschiede präzisieren.

7. Eine mit einer Quadratwurzel definierte Folge

Wir untersuchen u_0 = 0 und u_(n+1) = sqrt(u_n + 2). Zunächst muss sichergestellt werden, dass jedes Glied definiert ist. Durch vollständige Induktion zeigen wir 0 ≤ u_n ≤ 2. Dies gilt am Anfang. Gilt es beim Index n, folgt 2 ≤ u_n + 2 ≤ 4 und damit sqrt(2) ≤ u_(n+1) ≤ 2. Der Ausdruck bleibt definiert, und das nächste Glied erfüllt die angegebene Schranke.

Die Funktion f(x) = sqrt(x + 2) ist auf [0; 2] monoton wachsend. Weil u_1 = sqrt(2) > u_0 gilt, liefert vollständige Induktion u_(n+1) ≥ u_n: Aus u_n ≥ u_(n−1) folgt durch Anwendung von f dieselbe Ungleichungsrichtung. Wir können auch f(x) und x für 0 ≤ x ≤ 2 vergleichen. Beide Größen sind nichtnegativ; dann ist f(x) ≥ x äquivalent zu x + 2 ≥ x² beziehungsweise (x − 2)(x + 1) ≤ 0, was auf diesem Intervall gilt.

Die Folge wächst monoton und ist nach oben beschränkt: Der Satz von der monotonen Konvergenz stellt einen endlichen Grenzwert sicher. Aufgrund der Stetigkeit der Quadratwurzel erfüllt dieser Grenzwert L die Beziehung L = sqrt(L + 2). Weil L in [0; 2] liegt, dürfen wir beide Seiten quadrieren und erhalten L² − L − 2 = 0. Die Kandidaten sind 2 und −1; nur 2 gehört zum Definitionsbereich. Die Fixpunktgleichung allein genügte nicht zum Beweis der Konvergenz, und ihr Definitionsbereich entfernt eine zusätzliche algebraische Lösung.

8. Schwellen, ganze Zahlen und Algorithmen

Für die fiktive Größe u_n = 60(0,80)^n suchen wir den ersten Index, bei dem u_n < 5 gilt. Daraus folgt (0,80)^n < 1/12. Der Logarithmus wächst auf den positiven Zahlen, also gilt n ln(0,80) < ln(1/12). Die Division durch das negative ln(0,80) kehrt die Ungleichung um: n > ln(1/12)/ln(0,80), ungefähr 11,136. Die erste zulässige ganze Zahl ist 12.

Die abschließende Kontrolle begründet die Minimalität: u_11 beträgt ungefähr 5,154 und erfüllt die strenge Schwelle nicht; u_12 beträgt ungefähr 4,123 und erfüllt sie. n auf die nächstgelegene ganze Zahl zu runden, wäre hier das falsche Verfahren. Die Frage verlangt eine ganze Zahl, die eine Ungleichung erfüllt, und keine symmetrische Näherung an eine reelle Zahl.

Ein Algorithmus kann ohne Logarithmus vorgehen: Wir setzen n = 0 und u = 60; solange u ≥ 5 gilt, ersetzen wir u durch 0,80u und n durch n + 1. Der Zustand u = 60(0,80)^n ist eine Schleifeninvariante. Die Konvergenz gegen null stellt hier sicher, dass die Schwelle irgendwann erreicht wird. Bei einer anderen Folge könnte eine ähnliche Schleife nie enden; deshalb muss nicht nur ihre Syntax, sondern auch ihre Terminierung besprochen werden.

9. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Verschobener Index. Eine arithmetische Folge beginnt mit u_1 = 7 und hat die Differenz 4. **Lösung:** u_n = 7 + 4(n − 1) für n ≥ 1. Das Glied u_6 beträgt 27. Die Darstellung 7 + 4n würde einen zusätzlichen Zuwachs mitzählen. Die Summe der ersten sechs Glieder ist 6(7 + 27)/2 = 102.

B - Quotient. Ist die Folge u_n = (−1/2)^n monoton fallend? **Lösung:** Nein; ihre Glieder wechseln um null. Ihr Betrag (1/2)^n fällt und strebt gegen null. Der Quotient aufeinanderfolgender Glieder beträgt −1/2 und erlaubt nicht das auf dem Vergleich mit 1 beruhende Kriterium für positive Glieder.

C - Affine Formel. u_0 = 3 und u_(n+1) = 2u_n − 1. **Lösung:** L = 1, anschließend u_n = 1 + 2×2^n. Das erste Glied ist tatsächlich 3; das nächste ist 5. Die Folge divergiert gegen +∞. Eine Lösung von L = 2L − 1 ist nicht automatisch der Grenzwert jeder durch diese Vorschrift definierten Folge.

D - Eine unzureichende Schranke. „Eine nach oben beschränkte Folge konvergiert.“ **Lösung:** (−1)^n ist nach oben beschränkt, konvergiert aber nicht. Ihre Teilfolgen mit geraden und ungeraden Indizes besitzen unterschiedliche Grenzwerte; deshalb ist ein gemeinsamer Grenzwert unmöglich. Eine hinreichende Voraussetzung wäre, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist: Der Satz von der monotonen Konvergenz stellt dann einen endlichen Grenzwert sicher. Eine nur fallende und nach oben beschränkte Folge könnte gegen −∞ streben, etwa u_n = −n. Monotonie ohne ihre Richtung und die passende Schranke reicht daher nicht aus.

10. Wiederholung und Quellen

Sie sollten aus einer affinen Beziehung eine explizite Formel herleiten, eine Schranke durch vollständige Induktion beweisen und den ersten Index beim Erreichen einer Schwelle begründen können. Unterscheiden Sie bei jedem Ergebnis die Beobachtung, den Beweis der Veränderungsrichtung, den Konvergenzbeweis und die Bestimmung des Grenzwerts. Diese Schritte beantworten verschiedene Fragen und können verschiedene Argumente verlangen.

Der Lernweg folgt dem veröffentlichten offiziellen Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm, Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Sämtliche Beispiele, ausgearbeiteten Beweise und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Texte. Es werden weder reale Datensätze noch Renditevorhersagen oder Reproduktionen von Prüfungsaufgaben vorgelegt.

Kapitel 3 - Grenzwerte: Verhalten begründen, ohne Rechnung und Beweis zu verwechseln

Historischer Bezug - Cauchy: die Voraussetzungen der Analysis prüfen

Cauchys Cours d'analyse erschien 1821 für den Unterricht an der École Polytechnique. Das Werk gehört zu den historischen Bemühungen, Ergebnisse der Analysis streng zu formulieren. Der nützliche Bezug zu diesem Kapitel liegt in der Aufmerksamkeit für Voraussetzungen: Einen Ausdruck wiederzuerkennen oder einen Trend zu beobachten, genügt nicht, um eine Operation mit Grenzwerten zu rechtfertigen. Die hier dargestellten modernen Werkzeuge sind zusammen mit ihren Definitionsbereichen und Annahmen zu lesen. Dieser Bezug benennt eine historische Etappe; er setzt nicht jede von Cauchy verwendete Formulierung mit heutigen Definitionen und Sätzen gleich.

Historische Quelle: Bibliothèque nationale de France - notice bibliographique : https://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb302073247 ; University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cauchy/

1. Was die Annäherung an einen Wert bedeutet

Eine Folge konvergiert gegen L, wenn ihre Glieder schließlich dauerhaft so nahe an L bleiben, wie wir es verlangen. Genauer: Zu jeder Genauigkeit $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index N, sodass für jedes $n \geq N$ die Ungleichung $|u_n - L| < \varepsilon$ gilt. Der Index darf von der verlangten Genauigkeit abhängen. Es genügt nicht, dass ein Glied sehr nahe an L liegt: Von einem gewissen Index an müssen sämtliche nachfolgenden Glieder die Bedingung erfüllen.

Diese Formulierung erklärt, warum ein Grenzwert kein tatsächlich angenommener Wert sein muss. Bei u_n = 1 − 1/(n + 1) ist kein Glied gleich 1; der Abstand beträgt aber 1/(n + 1) und wird beliebig klein. Umgekehrt kann eine Folge bei unendlich vielen Indizes genau denselben Wert annehmen, ohne gegen ihn zu konvergieren: (−1)^n ist bei jedem geraden Index gleich 1 und bei ungeraden Indizes gleich −1. Die Häufigkeit eines Werts ersetzt keine Eigenschaft aller hinreichend großen Indizes.

Eine Folge kann nicht zwei verschiedene endliche Grenzwerte besitzen. Die Idee lässt sich so verstehen: Sind L und M verschieden, wählen wir Umgebungen mit Radien kleiner als ein Drittel von |L − M|. Diese Umgebungen sind disjunkt. Die Glieder können nicht von demselben hinreichend großen Index an sämtlich in beiden Umgebungen liegen. Diese Eindeutigkeit erlaubt es, von „dem Grenzwert“ zu sprechen, allerdings erst, nachdem seine Existenz begründet ist.

2. Ein erster Beweis aus der Definition

Für u_n = 1/(n + 1) soll die Konvergenz gegen null gezeigt werden. Der Abstand zu null beträgt genau 1/(n + 1). Für eine Genauigkeit ε > 0 wählen wir eine ganze Zahl N mit N + 1 > 1/ε. Dann gilt für jedes n ≥ N die Ungleichung 1/(n + 1) < ε. Der Beweis erfüllt unmittelbar die Definition und zeigt, wie ein passender Index konstruiert wird. Er beruht nicht auf einem Diagramm, das sich scheinbar der Achse nähert.

Für u_n = 3 + 2/(n + 1) beträgt der Grenzwert 3, denn |u_n − 3| = 2/(n + 1). Ein Index mit N + 1 > 2/ε ist geeignet. Der Faktor verändert die Geschwindigkeit, mit der eine Genauigkeit erreicht wird, nicht den Grenzwert. Zwei Folgen können denselben Grenzwert und auf jeder Stufe sehr unterschiedliche Abstände davon haben; verwechseln Sie nicht das Ziel mit der Konvergenzgeschwindigkeit.

Aufgaben der Terminale verlangen diese formale Darstellung nicht immer. Das Verständnis der Quantoren hilft dennoch, ein Argument zu beurteilen. „Für ε = 0,01 liegen die Glieder nahe“ begründet höchstens eine bestimmte Genauigkeit. Konvergenz betrifft jede positive Genauigkeit, auch wesentlich strengere Anforderungen. „Es gibt einen Index mit kleinem Abstand“ vergisst zudem, dass die Eigenschaft auch nach diesem Index weiter gelten muss.

3. Divergenz gegen unendlich und das Fehlen eines Grenzwerts

Eine Folge strebt gegen +∞, wenn zu jeder reellen Schranke A ihre sämtlichen Glieder von einem gewissen Index an über A liegen. Unendlich ist keine Zahl, die dem letzten Glied entspricht; eine Folge hat gewöhnlich kein letztes Glied. Das Symbol beschreibt ein Verhalten. Die Definition für −∞ ist entsprechend, mit Gliedern, die schließlich unter jeder Schranke liegen.

Die Folge 2n + 1 strebt gegen +∞: Wir wählen N einfach so groß, dass 2N + 1 > A gilt. Die Folge −n² strebt gegen −∞. Dagegen strebt (−1)^n n weder gegen +∞ noch gegen −∞: Ihre Glieder wechseln zwischen großen positiven und negativen Werten. Sie hat auch keinen endlichen Grenzwert. Das Wort „divergent“ kann somit mehrere Situationen bezeichnen, die eine genaue Schlussfolgerung unterscheiden muss.

Eine unbeschränkte Folge strebt nicht notwendigerweise gegen +∞. Zu untersuchen sind sämtliche hinreichend großen Indizes und nicht nur einige sehr große Werte. Ebenso muss eine beschränkte Folge nicht konvergieren: Schon der Wechsel zwischen −1 und 1 zeigt dies. Solche Gegenbeispiele eignen sich für ein Wiederholungsheft, weil sie davor schützen, einen Satz ohne seine Voraussetzungen anzuwenden.

4. Grenzwertoperationen und unbestimmte Formen

Konvergieren u_n und v_n gegen die endlichen Grenzwerte L und M, konvergiert ihre Summe gegen L + M und ihr Produkt gegen LM. Falls M ≠ 0 gilt und der Quotient von einem gewissen Index an definiert ist, konvergiert u_n/v_n gegen L/M. Die Bedingung für den Nenner ist wesentlich. Die üblichen Regeln vereinfachen eine Untersuchung, wenn sie anwendbar sind; sie bilden keine uneingeschränkte Arithmetik mit Unendlichkeitssymbolen.

Die Formen $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ und $0/0$ sind unbestimmt: Die einzelnen Grenzwerte allein erlauben keine Schlussfolgerung. Beispielsweise strebt n^2/n gegen $+\infty$, n/n gegen 1 und n/n^2 gegen null; alle drei Quotienten haben dieselbe Form ∞/∞. Ebenso ist $(n + 1) - n$ gleich 1, während $n^2 - n$ gegen $+\infty$ strebt. Dass keine automatische Schlussfolgerung möglich ist, bedeutet nicht, dass es kein Verfahren gibt.

Der Ausdruck muss umgeformt, ein dominierender Term sichtbar gemacht, faktorisiert oder rationalisiert werden. Umformungen müssen die Definitionsbereiche beachten. Danach lassen sich die Rechenregeln auf einen geeigneteren Ausdruck anwenden. Sofort einen sehr großen Zahlenwert einzusetzen, kann eine Antwort nahelegen, ersetzt aber keine Begründung und kann sogar einen Rundungsfehler verbergen.

5. Dominierende Terme in einem Quotienten

Für $u_n = (3n^2 - 2n + 5)/(2n^2 + n + 1)$ dividieren wir Zähler und Nenner für $n \geq 1$ durch n^2. Daraus ergibt sich $[3 - 2/n + 5/n^2]/[2 + 1/n + 1/n^2]$. Jeder Term mit $1/n$ oder $1/n^2$ strebt gegen null; der Nenner strebt gegen das von null verschiedene 2. Daher beträgt der Grenzwert 3/2. Das Argument verwirft Terme nicht deshalb, weil sie klein erscheinen, sondern begründet genau, dass sie im normierten Ausdruck gegen null streben.

Ist der Grad des Zählers größer als der des Nenners, kann der Quotient divergieren; das Vorzeichen wird durch die dominierenden Terme bestimmt. Ist der Grad kleiner, kann der Quotient gegen null streben. Bei $(-2n^3 + n)/(n^2 + 4)$ ergibt die Division durch n^2 den Ausdruck $(-2n + 1/n)/(1 + 4/n^2)$, also Divergenz gegen $-\infty$. Das Vorzeichen zu beachten, ist entscheidend; „höherer Grad, also unendlich“ reicht nicht aus.

Dieselben Umformungen gelten für Funktionen bei x gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Für $x \to -\infty$ ändert sich das Vorzeichen ungerader Potenzen. Eine Formel, die nur bei natürlichen Indizes untersucht wurde, darf nicht ungeprüft auf negative reelle Zahlen übertragen werden, insbesondere wenn sie eine Wurzel, einen Logarithmus oder eine nichtganzzahlige Potenz enthält.

6. Eine Differenz von Quadratwurzeln rationalisieren

Betrachten wir $u_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ für $n \geq 1$. Beide Terme streben gegen $+\infty$, und ihre Differenz ist unbestimmt. Durch Multiplikation mit dem konjugierten Ausdruck erhalten wir $u_n = n/[\sqrt{n^2 + n} + n]$. Die Division durch das positive n ergibt $1/[\sqrt{1 + 1/n} + 1]$. Der Grenzwert beträgt 1/2. Das Rationalisieren verwandelt eine schwierige Subtraktion in einen Quotienten, dessen Grenzwerte unmittelbar genutzt werden können.

Das Vorzeichen von n wurde in $\sqrt{n^2} = |n| = n$ verwendet. Für eine Variable x gegen $-\infty$ wäre $\sqrt{x^2} = x$ falsch. Beispielsweise verhält sich $\sqrt{x^2 + x} - x$ dann wie $-2x$ und strebt gegen $+\infty$, im Definitionsbereich der Wurzel. Eine gleich aussehende algebraische Form verlangt nicht denselben Grenzwert an beiden Enden der Achse.

Am Taschenrechner kann ein großer Wert von n dazu führen, dass $\sqrt{n^2 + n}$ und n relativ zueinander so nahe liegen, dass die

Rundung einen Teil ihrer Differenz verliert. Die rationalisierte Form ist häufig numerisch stabiler. Diese Verbindung zwischen symbolischer Begründung und numerischer Verlässlichkeit zeigt, dass Vereinfachung nicht nur auf dem Papier bequem ist: Sie kann die Qualität der tatsächlichen Rechnung verbessern.

7. Vergleichen und eingrenzen

Der Einschließungssatz besagt: Gilt von einem gewissen Index an a_n ≤ u_n ≤ b_n und besitzen a_n und b_n denselben endlichen Grenzwert L, dann konvergiert u_n gegen L. Die Bedingung „derselbe Grenzwert“ ist wesentlich. Eine Folge zwischen 0 und 1 einzugrenzen, beweist nicht ihre Konvergenz; es begründet lediglich eine Schranke.

Für u_n = (−1)^n/(n + 1) gilt −1/(n + 1) ≤ u_n ≤ 1/(n + 1). Beide Schranken streben gegen null, also konvergiert die Folge gegen null. Sie ist nicht monoton, doch ihre Schwankung nimmt ab. Dieses Beispiel unterscheidet deutlich Konvergenz und Monotonie. Eine Abschätzung des Betrags, |u_n| ≤ 1/(n + 1), liefert dieselbe Schlussfolgerung in knapperer Schreibweise.

Bei unendlichen Grenzwerten genügt manchmal ein Vergleich. Gilt von einem gewissen Index an u_n ≥ v_n und strebt v_n gegen +∞, strebt auch u_n gegen +∞. So begründet 5n + (−1)^n ≥ 5n − 1 die Divergenz gegen +∞ trotz einer kleinen Schwankung. Eine obere Schranke gegen +∞ würde nicht dieselbe Schlussfolgerung erlauben: Eine konstante oder fallende Folge wäre weiterhin möglich.

8. Beschränkte monotone Folgen und Fixpunkte

Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge konvergiert gegen einen endlichen Grenzwert. Eine monoton fallende, nach unten beschränkte Folge konvergiert ebenfalls. Die Schranken liefern nicht unbedingt den Wert dieses Grenzwerts. Aus $u_n \leq 10$ folgt kein Grund, den Grenzwert 10 anzunehmen. Der Satz stellt Konvergenz sicher; die Bestimmung des Grenzwerts verlangt ein zusätzliches Argument.

Bei einer Beziehung $u_{n+1} = f(u_n)$ gilt: Konvergiert die Folge gegen L und ist f an L stetig, dann ist $L = f(L)$. Diese Gleichung liefert Kandidaten. Sie beweist weder Konvergenz noch das Fehlen weiterer Kandidaten. Die Folge $u_{n+1} = 2u_n$ mit $u_0 = 1$ divergiert, obwohl die Gleichung $L = 2L$ die Lösung $L = 0$ hat. Die Existenz eines Fixpunkts bedeutet nicht, dass jede Entwicklung ihn erreicht oder sich ihm nähert.

Eine weitere Falle ist die Wahl einer Schranke allein zur Vereinfachung der Rechnung. Die Schranke muss bei jedem Index bewiesen werden. Bei einer wachsenden Folge stellt die Prüfung von $u_0 < 5$ nicht sicher, dass jedes Glied unter 5 bleibt. Vollständige Induktion oder eine explizite Darstellung müssen zeigen, dass das Intervall erhalten bleibt, bevor der Satz von der monotonen Konvergenz verwendet wird.

9. Funktionsgrenzwerte und einseitige Grenzwerte

Bei einer Funktion kann sich x einem Wert a nähern, ohne ihm gleich zu sein. Der Grenzwert von f(x) für x gegen a betrifft benachbarte Werte im Definitionsbereich. Für $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$, definiert für $x \neq 1$, ergibt das Faktorisieren $f(x) = x + 1$ auf diesem Definitionsbereich. Der Grenzwert bei 1 ist 2, obwohl f(1) undefiniert ist. Eine stetige Fortsetzung lässt sich konstruieren, indem an dieser Stelle der Wert 2 festgelegt wird; das ist eine neue Definition und kein bereits vorhandener Wert.

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert können verschieden sein. Bei $f(x) = 1/(x - 2)$ ist der Nenner negativ, wenn x sich 2 von unten nähert, und positiv bei Annäherung von oben. Der linksseitige Grenzwert ist $-\infty$, der rechtsseitige $+\infty$. Die Gerade $x = 2$ ist eine senkrechte Asymptote, doch ohne Angabe der Seite gibt es keinen einheitlichen unendlichen Grenzwert.

Bei $f(x) = 2 + 1/x$ beträgt der Grenzwert für $+\infty$ genau 2: $y = 2$ ist in dieser Richtung eine waagerechte Asymptote. Nicht bei jeder Funktion muss die Kurve ausschließlich auf einer Seite einer waagerechten Asymptote bleiben. Eine Asymptote beschreibt einen Abstand gegen null und keine körperliche Schranke, die die Kurve niemals überschreiten kann.

Eine schiefe Asymptote lässt sich durch $f(x) - (ax + b) \to 0$ erkennen. Für $f(x) = (x^2 + 1)/(x - 1)$ ergibt die Division $f(x) = x + 1 + 2/(x - 1)$. Der letzte Term strebt im Unendlichen gegen null; daher ist $y = x + 1$ eine schiefe Asymptote. Die Funktion selbst konvergiert nicht gegen eine endliche Zahl. Der Abstand von einer Geraden und der Funktionswert sind zwei verschiedene Gegenstände.

10. Exponentialfunktionen und Wachstumsvergleiche

Für $0 < q < 1$ strebt q^n gegen null. Eine zugängliche Begründung verwendet $1/q = 1 + h$ mit $h > 0$. Die Bernoulli-Ungleichung $(1 + h)^n \geq 1 + nh$, beweisbar durch vollständige Induktion, ergibt $0 < q^n \leq 1/(1 + nh)$. Die obere Schranke strebt gegen null. Für $-1 < q < 0$ ist der Betrag gleich $|q|^n$, und dieselbe Eingrenzung stellt trotz der wechselnden Vorzeichen Konvergenz gegen null sicher.

Für $q > 1$ strebt q^n gegen $+\infty$. Die üblichen Wachstumsvergleiche für Funktionen besagen insbesondere, dass $\ln(x)/x \to 0$ für $x \to +\infty$ gilt und die Exponentialfunktion im positiven Unendlichen Potenzen dominiert. Diese Ergebnisse sind hier bekannte Unterrichtseigenschaften; sie werden nicht durch eine Wertetabelle „bewiesen“. Sie können zur Begründung von $e^x/x^2 \to +\infty$ oder $x^2e^{-x} \to 0$ genutzt werden, nachdem der Definitionsbereich geprüft und das Produkt als Quotient umgeschrieben wurde.

Es ist nicht nötig, zur Berechnung von Grenzwerten eine fortgeschrittene Ableitungsregel für Quotienten einzuführen, um all diese Fälle zu behandeln. Ein noch nicht behandeltes Ergebnis ohne Begründung zu nutzen, kann Voraussetzungen und das erwartete Verfahren verdecken. Faktorisieren, Vergleichen und bekannte Unterrichtseigenschaften bieten bereits eine breite Auswahl an Gedankengängen auf dem Niveau der Terminale.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Quotient. Bestimmen Sie den Grenzwert von $(4n^2 + 3)/(n^2 - n + 2)$. **Lösung:** Durch Division durch n^2 folgt $[4 + 3/n^2]/[1 - 1/n + 2/n^2] \to 4$. Der Nenner strebt gegen 1, weshalb die Quotientenregel für Grenzwerte anwendbar ist.

B - Gedämpfter Vorzeichenwechsel. u_n = 7 + (−1)^n/n für n ≥ 1. **Lösung:** |u_n − 7| = 1/n → 0, also u_n → 7. Die Folge ist nicht monoton; dies verhindert ihre Konvergenz nicht.

C - Konjugierter Ausdruck. v_n = sqrt(n² + 4n) − n. **Lösung:** v_n = 4/[sqrt(1 + 4/n) + 1], also beträgt der Grenzwert 2. Der Faktor 4 wird nicht verworfen, sondern bleibt nach der Normierung im Zähler.

D - Grenzwert und Wert. f(x) = x + 2 für x ≠ 0 und f(0) = 10. **Lösung:** Der Grenzwert bei null ist 2, der Funktionswert aber 10. Die Funktion ist an null nicht stetig. Benachbarte Werte bestimmen den Grenzwert; der an der Stelle gewählte Wert bestimmt zusätzlich die Stetigkeit.

E - Fixpunkt. u_0 = 2 und u_(n+1) = −u_n. **Lösung:** Die Glieder wechseln zwischen 2 und −2. Die Gleichung L = −L liefert 0, die Folge konvergiert jedoch nicht. In einer Beziehung dürfen keine Grenzwerte genommen werden, bevor ihre Existenz begründet oder ausdrücklich vorausgesetzt ist.

12. Wiederholung und Quellen

Geben Sie bei jeder Untersuchung die Richtung oder Seite des Grenzwerts an, prüfen Sie den Definitionsbereich und suchen Sie nach einer möglichen unbestimmten Form. Wählen Sie dann eine Umformung und anschließend einen Satz, dessen Voraussetzungen geprüft wurden. Eine Schlussfolgerung unterscheidet einen endlichen Grenzwert, Divergenz gegen eine Unendlichkeit und das Fehlen eines Grenzwerts. Rundungen und Diagramme sind Kontrollen, kein Ersatz für diese Schritte.

Rahmen des Lernwegs: der veröffentlichte offizielle Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und sein Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Beispiele,

ausgearbeitete Beweise und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Texte; es werden weder Lehrbuchtexte Dritter noch deren Zeichnungen oder Prüfungsaufgaben wiedergegeben.

Kapitel 4 - Stetigkeit: Existenz, Eindeutigkeit und Eingrenzungen beweisen

Historischer Bezug - Bolzano: Existenz verlangt einen Beweis

In einer 1817 veröffentlichten Abhandlung bewies Bernard Bolzano den Zwischenwertsatz und suchte dabei nach einer analytischen Begründung. Dieser Sachverhalt veranschaulicht den Unterschied zwischen der Beobachtung, dass eine Kurve eine Höhe durchläuft, und dem Beweis, dass unter genauen Voraussetzungen eine Lösung existiert. Unser Kapitel wendet diese Unterscheidung auf Stetigkeit an und trennt anschließend Existenz, Eindeutigkeit und numerische Näherung. Der historische Bezug ersetzt keinen Beweis und erlaubt nicht, eine Voraussetzung zu vergessen; er fordert dazu auf, genau zu fragen, warum das Ergebnis gilt.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bolzano/

1. Drei Fragen, die nicht verwechselt werden dürfen

Bei einer Gleichung $f(x) = k$ stellen sich drei Fragen: Gibt es mindestens eine Lösung, gibt es nur eine, und wie lässt sie sich näherungsweise bestimmen? Ein Taschenrechner, der eine Zahl anzeigt, beantwortet manchmal die dritte Frage, ohne die ersten beiden beantwortet zu haben. Ein Existenzbeweis liefert nicht unbedingt einen exakten Ausdruck. Ein Eindeutigkeitsbeweis zeigt nicht automatisch, dass eine Lösung existiert. Diese Fragen zu trennen, macht die Lösung sicherer und verständlicher.

Für die Existenz spielt Stetigkeit eine zentrale Rolle. Strenge Monotonie kann auf einem Intervall Eindeutigkeit gewährleisten.

Anschließend konstruiert ein numerisches Verfahren Eingrenzungen oder eine Näherung. Das Begründen ergänzt somit das Rechnen: Es bestimmt, was die Rechnung sucht und warum sie erfolgreich sein kann. Die zuletzt angezeigte Zahl darf nicht als exakte Lösung ausgegeben werden, wenn der Algorithmus nur einen Näherungswert geliefert hat.

Der Definitionsbereich gehört zum Problem. Eine Funktion mit einer Wurzel oder einem Logarithmus legt Einschränkungen fest; ein Nenner kann eine Stelle ausschließen. Der Zwischenwertsatz verlangt Stetigkeit auf dem gesamten betrachteten Intervall. Nur die Werte der beiden Randpunkte zu prüfen, ersetzt diese Voraussetzung nicht. Eine Unstetigkeit oder eine fehlende Stelle kann das Argument verhindern.

2. Stetigkeit an einer Stelle und auf einem Intervall

Eine Funktion f ist an einer Stelle a ihres Definitionsbereichs stetig, wenn der Grenzwert von f(x) für x gegen a mit f(a) übereinstimmt; die Annäherung wird dabei an den Definitionsbereich angepasst. Diese Definition verbindet benachbarte Werte mit dem Wert an der Stelle. Ist f(a) undefiniert, darf keine Stetigkeit an a behauptet werden; nach Untersuchung des Grenzwerts lässt sich möglicherweise eine stetige Fortsetzung konstruieren.

Polynomfunktionen sind auf den reellen Zahlen stetig. Eine rationale Funktion ist überall dort stetig, wo ihr Nenner von null verschieden ist. Die Exponentialfunktion ist auf den reellen Zahlen stetig, der Logarithmus auf den streng positiven reellen Zahlen. Summen, Produkte und Verkettungen stetiger Funktionen sind auf ihren passenden Definitionsbereichen stetig. Ein Quotient verlangt einen von null verschiedenen Nenner. Mit diesem Werkzeugkasten kann Stetigkeit begründet werden, ohne in jeder Aufgabe auf die Definition zurückzugreifen.

Das anschauliche Bild einer Zeichnung „ohne Absetzen des Stifts“ ist hilfreich, aber begrenzt. Es hängt vom Maßstab der Zeichnung ab und bildet keine allgemeine Definition. Eine aus wenigen Punkten berechnete Kurve kann eine Lücke oder eine sehr schnelle Veränderung verdecken. Umgekehrt kann eine abschnittsweise definierte Funktion stetig sein, wenn ihre Werte und Grenzwerte richtig zusammenpassen. Die Bezeichnung der Formel allein entscheidet nicht über die Eigenschaft.

3. Eine abschnittsweise definierte Funktion verbinden

Es sei $f(x) = x^2$ für $x \leq 1$ und $f(x) = ax + b$ für $x > 1$. Links von 1 beträgt der Grenzwert 1; auch $f(1)$ ist 1. Rechts beträgt der Grenzwert $a + b$. Stetigkeit an 1 verlangt daher $a + b = 1$. Unendlich viele Paare erfüllen diese Bedingung. Die alleinige Forderung nach Stetigkeit bestimmt also nicht notwendigerweise sämtliche Parameter.

Wird an der Übergangsstelle zusätzlich Differenzierbarkeit verlangt, beträgt die linksseitige Ableitung 2 und die rechtsseitige a; somit ist $a = 2$ und anschließend $b = -1$ nötig. Diese zusätzliche Bedingung beantwortet eine andere Frage. Eine Funktion kann stetig sein, ohne differenzierbar zu sein, wie $|x|$ an null. Ihr Graph hat keinen Sprung, doch die Steigungen links und rechts sind verschieden.

In einem Modell kann Stetigkeit ausdrücken, dass sich der Wert einer Größe beim Überschreiten einer Schwelle nicht augenblicklich verändert. Differenzierbarkeit kann einen Übergang in der Steigung ausdrücken. Diese Eigenschaften müssen allerdings durch das reale Problem begründet werden; sie sind keine allgemein geltenden ästhetischen Anforderungen. Eine stufenweise festgelegte Preisstruktur kann beispielsweise bewusst Sprünge haben. Ein Modell soll das Wesentliche beschreiben und nicht bloß eine angenehm anzusehende Kurve liefern.

4. Der Zwischenwertsatz

Ist f auf dem abgeschlossenen Intervall [a; b] stetig, wird jeder Wert k zwischen f(a) und f(b) auf diesem Intervall mindestens einmal angenommen. Zur Suche nach einer Nullstelle setzen wir k = 0. Haben f(a) und f(b) entgegengesetzte Vorzeichen, stellt Stetigkeit mindestens ein c mit f(c) = 0 sicher. Ist einer der Randwerte bereits null, ist dieser Randpunkt selbst eine Lösung.

Der Satz behauptet Existenz, nicht notwendigerweise Eindeutigkeit. Bei $f(x) = x^2 - 1$ auf $[-2; 2]$ sind beide Randwerte positiv; dennoch besitzt die Funktion zwei Nullstellen. Ein Vorzeichenwechsel an den Randpunkten ist im üblichen Fall eine hinreichende Bedingung für eine Nullstelle, aber keine notwendige Bedingung für jeden Fall ihrer Existenz. Schließen Sie nicht: „kein Vorzeichenwechsel, also keine Lösung“.

Stetigkeit ist wesentlich. Eine Funktion mit dem Wert -1 für $x < 0$ und dem Wert 1 für $x \geq 0$ wechselt zwischen -1 und 1 das Vorzeichen, ohne den Wert null anzunehmen. Auch die Funktion $1/x$ hat auf beiden Seiten von null entgegengesetzte Vorzeichen, ist aber nicht auf dem gesamten dazwischenliegenden Intervall definiert. Diese Beispiele widerlegen eine falsche Version des Satzes, die nur die Vorzeichen der Randwerte beibehält.

5. Eindeutigkeit durch Monotonie ergänzen

Ist f auf einem Intervall streng monoton, kann die Funktion denselben Wert nicht an zwei verschiedenen Stellen dieses Intervalls annehmen. Stetigkeit und die Eingrenzung eines Werts liefern somit die Existenz, während strenge Monotonie die Eindeutigkeit liefert. Die Begründungen können kurz sein, ihre Rollen müssen in der Darstellung aber getrennt bleiben.

Untersuchen wir $f(x) = e^x - 3x$ auf $[0; 1]$. Die Funktion ist stetig, $f(0) = 1$ und $f(1) = e - 3 < 0$. Deshalb liegt eine Nullstelle in $(0; 1)$.

Die Ableitung f'(x) = e^x − 3 ist auf [0; 1] streng negativ, denn e^x ≤ e < 3. Die Funktion fällt streng monoton; dort ist die Nullstelle eindeutig. Zur Begründung dieser beiden Ergebnisse ist kein exakter elementarer Ausdruck erforderlich.

Auf einem größeren Intervall kann dieselbe Gleichung eine weitere Lösung haben. Hier garantieren f(1) < 0 und f(2) = e² − 6 > 0 mindestens eine Nullstelle zwischen 1 und 2. Auf [0; 1] bewiesene Eindeutigkeit bedeutet daher nicht Eindeutigkeit auf allen reellen Zahlen. Der Geltungsbereich der Schlussfolgerung muss ebenso sorgfältig angegeben werden wie der Definitionsbereich der Funktion.

Eine überall streng positive Ableitung ist eine hinreichende, keine notwendige Bedingung für strenges Wachstum. Die Funktion x³ wächst streng monoton, obwohl ihre Ableitung an null gleich null ist. Für a < b ist die Differenz b³ − a³ = (b − a)(a² + ab + b²) positiv: Der erste Faktor ist positiv, und der zweite kann für zwei verschiedene reelle Zahlen nicht null sein. Dieses algebraische Argument vermeidet eine unbegründete Verallgemeinerung aus einer einzelnen Stelle mit verschwindender Ableitung.

6. Das Bild eines Intervalls und Extremwerte

Stetigkeit stellt sicher, dass das Bild eines Intervalls zwischen zwei angenommenen Werten keine Lücke enthält. Das bedeutet nicht, dass die Extremwerte notwendigerweise die Werte an den beiden Randpunkten sind. Für f(x) = x² auf [−2; 3] betragen die Randwerte 4 und 9, aber null wird bei x = 0 angenommen. Das Bild ist [0; 9], nicht [4; 9]. Zur Bestimmung des gesamten Bildes müssen Monotonieverhalten oder Extremwerte untersucht werden.

Eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall nimmt ein Minimum und ein Maximum an. Dieses Ergebnis darf nicht ungeprüft auf ein offenes Intervall

übertragen werden. Die Funktion f(x) = x auf (0; 1) ist beschränkt, nimmt aber weder null noch eins an; auf diesem Definitionsbereich hat sie daher weder ein Minimum noch ein Maximum. Untere und obere Schranken existieren als Zahlen, ohne notwendigerweise Funktionswerte zu sein.

Diese Unterscheidung ist für Optimierungsprobleme nützlich. Eine Rechnung kann einen Wert außerhalb des Definitionsbereichs oder an einem ausgeschlossenen Randpunkt liefern. Die Antwort muss dann angeben, ob ein angenommenes Maximum existiert oder nur eine obere Schranke, der man sich nähern kann. Ein offenes durch ein abgeschlossenes Intervall zu ersetzen, um die Untersuchung zu vereinfachen, verändert das Problem; diese Änderung muss begründet werden und darf nicht stillschweigend erfolgen.

7. Bisektion: eine Invariante erhalten

Die Bisektion sucht eine Nullstelle einer stetigen Funktion in einem Intervall, dessen Randwerte entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Wir berechnen den Mittelpunkt m = (a + b)/2. Gilt f(m) = 0 exakt, ist das Problem gelöst. Andernfalls behalten wir die Hälfte, deren Randwerte weiterhin entgegengesetzte Vorzeichen haben. Jede Stufe halbiert die Intervalllänge und erhält die Existenz mindestens einer Nullstelle im behaltenen Intervall.

Der Vorzeichenwechsel ist die logische Invariante des Verfahrens. Ist die Nullstelle eindeutig, schließen die aufeinanderfolgenden Intervalle sie immer ein. Nach N Halbierungen eines Anfangsintervalls der Länge L beträgt die Länge L/2^N. Wird der letzte Mittelpunkt als Näherung verwendet, beträgt der absolute Fehler unter den exakten Voraussetzungen des mathematischen Modells höchstens L/(2^(N+1)). Die Kriterien „Intervallbreite“ und „Fehler des Mittelpunkts“ müssen unterschieden werden.

Um eine Breite kleiner oder gleich 0,001 aus einem Intervall der Länge 1 zu erhalten, benötigen wir 2^N ≥ 1000, also genügen N = 10 Halbierungen: 1/1024 ≈ 0,0009766. Neun Halbierungen ergeben ungefähr 0,001953 und reichen nicht aus. Die Zählung hängt davon ab, wann die Breite gemessen wird; eine klar angegebene Initialisierung und Stufe vermeiden eine Indexverschiebung.

8. Einen ersten Ablauf erklären

Kehren wir zu f(x) = e^x − 3x auf [0; 1] zurück, wo die Nullstelle eindeutig ist. Am Mittelpunkt 0,5 beträgt f ungefähr 0,1487 und ist daher positiv. Weil f(1) negativ ist, behalten wir [0,5; 1]. Der neue Mittelpunkt 0,75 ergibt ungefähr −0,1330, also behalten wir [0,5; 0,75]. Am Mittelpunkt 0,625 ist f ungefähr −0,00675; wir behalten [0,5; 0,625].

Das Intervall darf nicht deshalb gewählt werden, weil der Mittelpunkt „nahe an null erscheint“. Vorzeichen und Stetigkeit begründen die Wahl der Hälfte. Ein kleiner Wert von f(m) allein stellt nicht sicher, dass m sehr nahe an der Nullstelle liegt: Bei einer fast flachen Funktion kann ein großer horizontaler Abstand mit einem kleinen vertikalen Abstand verbunden sein. Die Eingrenzungen geben eine andere geometrische Information als das Residuum f(m).

Ein Programm kann prüfen, ob f(a) und f(m) „dieselben Vorzeichen“ haben. In exakter Arithmetik kennzeichnet ein positives Produkt diesen Fall. In Gleitkommaarithmetik können extrem große oder kleine Werte einen Überlauf verursachen oder auf null gerundet werden; Vorzeichen einzeln zu vergleichen, kann robuster sein. Diese Beobachtung verlangt keine Beherrschung der gesamten numerischen Analysis, ermuntert aber dazu, eine Computeroperation nicht mit einem exakten Beweis zu verwechseln.

9. Andere Verfahren und Gründe für ihren Vergleich

Das Newton-Verfahren verwendet die Tangente: x_(n+1) = x_n − f(x_n)/f'(x_n), sofern der Nenner von null verschieden ist. Unter günstigen Bedingungen kann es sehr schnell konvergieren; ein ungünstiger Startpunkt kann aber zu Divergenz, einem Zyklus oder einem Wert außerhalb des Definitionsbereichs führen. Es wird hier als Vertiefung vorgestellt, nicht als automatischer Ersatz für Bisektion oder für die Erwartungen der Lehrkraft.

Für $f(x) = x^3 - 2x + 2$ und $x_0 = 0$ liefert Newton $x_1 = 0 - 2/(-2) = 1$. Dann ist $f(1) = 1$ und $f'(1) = 1$, also $x_2 = 0$. Die Werte wechseln zwischen 0 und 1, ohne sich einer Nullstelle zu nähern. Eine Software, die nach einigen Schritten abbricht, kann eine Zahl anzeigen, ohne die Lösung gefunden zu haben. Ein unter günstigen Bedingungen schnelleres Verfahren ist daher nicht allgemein ein zuverlässigeres Verfahren.

Bisektion ist gegenüber manchen lokalen Verfahren langsam; ihre Eingrenzungen lassen sich aber bei erfüllten Voraussetzungen leicht garantieren. Verfahren können kombiniert werden, etwa durch zuverlässige Schranken und einen kontrollierten schnelleren Schritt. Dieser Vergleich veranschaulicht einen allgemeinen Gedanken: Numerische Effizienz, mathematische Garantien und einfache Überprüfbarkeit sind verschiedene Kriterien.

10. Von einer Gleichung zu einer Ungleichung

Eine Nullstelle kann das Vorzeichen einer Funktion gliedern. Fällt f auf [a; b] streng monoton und besitzt dort eine eindeutige Nullstelle α, ist f vor α positiv und danach negativ. Die Lösung von $f(x) \geq 0$ auf [a; b] ergibt dann [a; α]. Die Nullstelle lässt sich exakt als „die eindeutige Lösung von ...“ beschreiben, selbst wenn nur dezimale Eingrenzungen bekannt sind.

Bei f(x) = e^x − 3x auf [0; 1] liefert das vorherige Ergebnis diese Vorzeichenstruktur. Ersetzen Sie α nicht durch einen gerundeten Näherungswert in einer als exakt bezeichneten Antwort. Zunächst kann die exakte Menge mithilfe von α angegeben werden, gefolgt von einer Eingrenzung zur Deutung. Diese Trennung verhindert, dass Werte nahe der Schwelle allein aufgrund einer Rundung ein- oder ausgeschlossen werden.

Eine nichtmonotone Funktion verlangt eine vollständigere Vorzeichentabelle. Mehrere Nullstellen können den Definitionsbereich in mehrere Intervalle teilen; bei einer mehrfachen Nullstelle wechseln die Vorzeichen nicht immer. Beispielsweise verschwindet $(x - 1)^2$ an 1, ohne negativ zu werden. Existenzsatz und Nullstellen ersetzen deshalb keine Untersuchung der Struktur des Ausdrucks.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Stetigkeit an einem Übergang. f(x) = 2x + 1 für x < 2 und f(x) = x^2 + c für x ≥ 2. **Lösung:** Der linksseitige Grenzwert bei 2 ist 5; der Wert und der rechtsseitige Grenzwert sind 4 + c. Stetigkeit verlangt c = 1. Differenzierbarkeit ist damit nicht sichergestellt: Die Ableitungen am Übergang wären 2 und 4.

B - Existenz. P(x) = x^3 − 4x + 1. Zeigen Sie, dass zwischen 0 und 1 eine Nullstelle liegt. **Lösung:** Das Polynom ist stetig, P(0) = 1 und P(1) = −2. Der Zwischenwertsatz stellt mindestens eine Nullstelle sicher. Auf [0; 1] gilt P'(x) = $3x^2$ − 4 < 0, was Eindeutigkeit in diesem Intervall gewährleistet. Diese Schlussfolgerung betrifft nicht sämtliche reellen Zahlen.

C - Anzahl der Halbierungen. Das Anfangsintervall hat die Breite 8. Welche Breite ergibt sich nach sechs Halbierungen? **Lösung:** 8/2^6 = 0,125. Der Mittelpunkt hat gegenüber jeder weiterhin eingeschlossenen Nullstelle einen maximalen Fehler von 0,0625.

Der Funktionswert am Mittelpunkt wurde für diese Fehlergrenze nicht verwendet.

D - Ein falsch angewandter Zwischenwertsatz. $f(x) = 1/x$ und $f(-1)f(1) < 0$. **Lösung:** Die Funktion ist auf $[-1; 1]$ nicht stetig, weil sie an null undefiniert ist. Der Satz ist nicht anwendbar. Tatsächlich besitzt $1/x$ nirgendwo in ihrem Definitionsbereich eine Nullstelle.

E - Falsch gefolgerte Eindeutigkeit. Eine stetige Funktion hat $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Besitzt sie genau eine Nullstelle? **Lösung:** Nicht unbedingt; sie kann die Achse mehrmals kreuzen. Eine zusätzliche Eigenschaft wie strenge Monotonie auf dem Intervall oder ein anderer Eindeutigkeitsbeweis ist erforderlich.

12. Wiederholung und Quellen

Schreiben Sie zum Üben getrennte Absätze für Existenz, Eindeutigkeit und Näherung. Prüfen Sie im ersten Stetigkeit und Randwerte; begründen Sie im zweiten die Eigenschaft, die zwei Lösungen verhindert; nennen Sie im dritten Invariante und Genauigkeit. Rekonstruieren Sie anschließend für jede fehlende Voraussetzung ein Beispiel, bei dem eine Schlussfolgerung scheitert.

Der veröffentlichte offizielle Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale bildet den Rahmen des Lernwegs: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Situationen, Formulierungen und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Texte. Die Vertiefung zu Newton veranschaulicht Grenzen eines numerischen Verfahrens; sie ist weder eine behauptete Prüfungsanforderung noch eine Garantie für das Funktionieren von Software.

Kapitel 5 - Differentiation und Optimierung: von lokaler Veränderung zur Schlussfolgerung

Historischer Bezug - Leibniz: Veränderungen berechnen und anschließend begründen

Im Jahr 1684 veröffentlichte Leibniz in den Acta Eruditorum einen Artikel über seine Differentialrechnung, der Ableitungsregeln und die Schreibweise d enthielt. Die institutionelle Biografie weist auch darauf hin, dass der Artikel keine Beweise dieser Regeln lieferte. Beim heutigen Wiederholen sollten wir deshalb eine Rechenregel von den Gründen und Voraussetzungen unterscheiden, die sie gültig machen. Dieses Kapitel verbindet das Berechnen von Ableitungen mit Definitionsbereichen und der Deutung von Vorzeichen. Das Datum bezeichnet eine Veröffentlichung, ohne die Erfindung der Infinitesimalrechnung ausschließlich einer Person zuzuschreiben.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Leibniz/

1. Die Ableitung vor ihrer Anwendung verstehen

Der Quotient $[f(a + h) − f(a)]/h$ misst für $h \neq 0$ eine mittlere Änderung zwischen zwei Stellen. Besitzt dieser Quotient für h gegen null einen endlichen Grenzwert, ist f an a differenzierbar und dieser Grenzwert ist f'(a). Die Ableitung liefert somit eine lokale Information: Sie beschreibt eine Veränderung nahe einer Stelle, nicht notwendigerweise das gesamte Verhalten auf dem Definitionsbereich.

Geometrisch ist f'(a) die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt mit den Koordinaten (a; f(a)). Ihre Gleichung lautet $y = f(a) +$

f'(a)(x − a). Die Gleichung enthält eine Steigung und einen Punkt; die bloße Darstellung y = f'(a)x vergisst gewöhnlich den Achsenabschnitt. Eine waagerechte Tangente bedeutet f'(a) = 0, nicht automatisch f(a) = 0.

Stellt f eine Entfernung in Metern und x eine Dauer in Sekunden dar, besitzt die Ableitung die Einheit m/s. Stellt f eine Fläche in m² in Abhängigkeit von einer Länge in m dar, hat ihre Ableitung die Einheit m. Differenzieren verändert die Einheiten also entsprechend der Variablen. Diese Konsistenz hilft, bei einer Anwendung die Verwechslung von Funktion und Ableitung zu erkennen.

2. Differenzierbarkeit und lokale Näherung

Eine an einer Stelle differenzierbare Funktion ist dort stetig, doch die Umkehrung ist falsch. Die Funktion |x| ist an null stetig und besitzt dort keine Ableitung, weil die Änderungsraten von links und rechts gegen −1 und 1 streben. Stetigkeit verbindet die Werte; Differenzierbarkeit verlangt zusätzlich eine lokale Änderung, die mit einer einzigen Steigung vereinbar ist.

Ist f an a differenzierbar, können wir f(a + h) = f(a) + f'(a)h plus einen Rest schreiben, der gegenüber h vernachlässigbar wird. Die affine Näherung f(a + h) ≈ f(a) + f'(a)h ist somit lokal. Sie ist keine allgemeine Gleichheit, und ihre Genauigkeit hängt von der Funktion und der Größe von h ab. Für f(x) = x² nahe a = 2 ergibt sich f(2 + h) = 4 + 4h + h²: Der Rest ist ausdrücklich h².

Für h = 0,10 liefert die Näherung 4,40 und der exakte Wert beträgt 4,41. Für h = 1 liefert sie 8 statt 9. Dieselbe lineare Formel wird ungenauer, wenn wir uns von der Stelle entfernen. Ohne Kenntnis oder Abschätzung des Restes können wir eine Tangente nicht in einen garantierten numerischen Fehler verwandeln. Diese Vorsicht

verbindet einen lokalen Begriff mit seiner Verwendung in Näherungsrechnungen.

3. Ableitungsregeln und Definitionsbereiche

Für zwei differenzierbare Funktionen u und v lautet die Ableitung einer Summe u' + v'. Die Ableitung eines Produkts ist u'v + uv', nicht u'v'. Für einen mit v ≠ 0 definierten Quotienten u/v beträgt die Ableitung (u'v − uv')/v². Ein konstanter Faktor bleibt erhalten: (ku)' = ku'. Definitionsbereiche müssen vor oder zusammen mit der Rechnung bestimmt werden.

Bei einer zusammengesetzten Funktion g(u(x)) ist die Ableitung g'(u(x))u'(x). Der Faktor u' berücksichtigt die Änderung des inneren Ausdrucks. So gilt (e^(3x²))' = 6x e^(3x²). Für ln(u(x)) mit u(x) > 0 lautet die Ableitung u'/u. Für sqrt(u(x)) kann die Formel u'/(2sqrt(u)) an Stellen verwendet werden, an denen u > 0 gilt und die übrigen Differenzierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind. Ein an einer Stelle definierter Ausdruck ist dort nicht unbedingt differenzierbar.

Betrachten wir f(x) = ln(x² + 1). Der Definitionsbereich sind alle reellen Zahlen, denn x² + 1 > 0, und f'(x) = 2x/(x² + 1). Für g(x) = ln(x² − 1) lautet der Definitionsbereich (−∞; −1) ∪ (1; +∞). Die Formel g'(x) = 2x/(x² − 1) ähnelt der vorherigen, doch die Definitionsbereiche unterscheiden sich. Eine formal richtige Rechnung mit einem Ausdruck entbindet nicht von der Bestimmung ihres zulässigen Bereichs.

4. Vom Vorzeichen der Ableitung zum Verhalten der Funktion

Auf einem Intervall, auf dem f differenzierbar ist, stellt eine nichtnegative Ableitung eine monoton wachsende Funktion sicher; eine nichtpositive Ableitung stellt eine monoton fallende Funktion sicher. Eine streng positive Ableitung gewährleistet strenges Wachstum. Vor der Folgerung strenger Monotonie müssen die genauen Formulierungen und mögliche einzelne Stellen mit verschwindender Ableitung geprüft werden. Eine vollständige Untersuchung kann eine Vorzeichentabelle und zusätzliche Argumente verwenden.

Das Intervall ist wichtig. Eine rationale Funktion kann auf zwei durch eine ausgeschlossene Stelle getrennten Teilen ihres Definitionsbereichs eine Ableitung mit demselben Vorzeichen besitzen; das genügt nicht, um sie auf deren Vereinigung als monoton zu bezeichnen. Für $f(x) = 1/x$ ist die Ableitung auf jedem Intervall $(-\infty; 0)$ und $(0; +\infty)$ negativ. Beim Vergleich von $x = -1$ und $x = 1$ über die getrennte Menge hinweg ergibt sich jedoch $f(-1) < f(1)$, was nicht zu einem globalen Fallen passt.

Eine Ableitung von null an einer Stelle garantiert kein Extremum. Bei x^3 verschwindet die Ableitung an null, die Funktion wächst aber weiter. Ein Vorzeichenwechsel von f' von positiv zu negativ erzeugt ein lokales Maximum; der umgekehrte Wechsel erzeugt ein lokales Minimum. Anschließend müssen weitere mögliche Werte verglichen werden, bevor auf dem verlangten Definitionsbereich ein globales Maximum oder Minimum bestimmt werden kann.

5. Eine Funktion vollständig untersuchen

Es sei f(x) = (x + 1)e^(−x). Sie ist auf den reellen Zahlen definiert und differenzierbar. Nach der Produktregel gilt f'(x) = e^(−x) − (x + 1)e^(−x) = −xe^(−x). Weil die Exponentialfunktion immer positiv ist, besitzt die Ableitung das Vorzeichen von −x. Die Funktion wächst auf (−∞; 0] streng monoton und fällt auf [0; +∞) streng monoton. Ihr globales Maximum beträgt f(0) = 1.

Für +∞ strebt das Produkt (x + 1)e^(−x) nach dem Wachstumsvergleich gegen null und bleibt für x > −1 positiv. Für −∞ strebt x + 1 gegen −∞ und e^(−x) gegen +∞; das Produkt strebt gegen −∞. Die Funktion verschwindet bei x = −1. Diese Sachverhalte ergeben einen stimmigen Graphen: Er verläuft durch (−1; 0), steigt bis (0; 1) und fällt anschließend rechts gegen die waagerechte Asymptote y = 0.

Beschränkt das Problem x auf [0; 4], bleibt das Maximum 1 und das Minimum beträgt f(4) = 5e^−4, ungefähr 0,0916. Ein Ergebnis auf einem eingeschränkten Definitionsbereich muss zusammen mit seinen Randpunkten untersucht werden. Eine global wichtige kritische Stelle kann durch eine Nebenbedingung ausgeschlossen sein; umgekehrt kann ein Randpunkt zum Ort eines Optimums werden, obwohl die Ableitung dort nicht null ist.

6. Eine Zielfunktion unter einer Nebenbedingung aufstellen

Optimierung beginnt vor dem Ableiten. Bestimmen Sie die zu optimierende Größe, die Variablen, ihre Einheiten und die Nebenbedingungen. Bei einer offenen Schachtel mit quadratischer Grundseite x und Höhe h ergibt ein vorgeschriebenes Volumen V die Beziehung x²h = V, also h = V/x² für x > 0. Die idealisierte Materialfläche ist A = x² + 4xh beziehungsweise A(x) = x² + 4V/x. Gezählt werden der Boden und die vier Seiten; dieses Modell hat keinen Deckel.

Für $V = 32\ dm^3$ gilt $A(x) = x^2 + 128/x$ in dm^2, mit x in dm. Die Ableitung lautet $A'(x) = 2x - 128/x^2 = 2(x^3 - 64)/x^2$. Der Nenner ist positiv; daher ist die Ableitung für $0 < x < 4$ negativ und für $x > 4$ positiv. Die kleinste Materialfläche ergibt sich bei $x = 4$ dm; die Höhe beträgt dann $32/16 = 2$ dm und die Fläche $16 + 32 = 48\ dm^2$.

Deuten Sie anschließend die in der Aufgabe angegebenen tatsächlichen Nebenbedingungen. Müsste x zu [2; 3] gehören, wäre der Wert 4 unzulässig und A auf dem gesamten Intervall fallend: Das Minimum läge dort bei $x = 3$. Ein Optimum ohne Definitionsbereich zu berechnen, beantwortet ein unvollständiges Problem. Materialdicke, Zuschnitt, Festigkeit und Verluste fehlen im Modell; die fiktive Schachtel ist kein zertifizierter Fertigungsplan.

7. Lokale und globale Optimierung

Ein lokales Minimum bedeutet, dass benachbarte Werte größer oder gleich sind; ein globales Minimum vergleicht mit jedem Wert des Definitionsbereichs. Eine Funktion kann mehrere lokale Extremwerte haben. Die Lösung von $f' = 0$ liefert Kandidaten im Inneren, keine allgemein gültige vollständige Liste von Extremwerten: Je nach Definitionsbereich müssen auch nichtdifferenzierbare Stellen und Randpunkte untersucht werden.

Bei $f(x) = x^2$ auf $[-1; 2]$ liegt das Minimum an null und das Maximum an 2. Die Ableitung an 2 beträgt 4, nicht null. Das Maximum liegt am Rand des Definitionsbereichs; es besteht kein Widerspruch zur üblichen Bedingung für ein differenzierbares Extremum im Inneren. Bei $|x|$ auf $[-1; 1]$ liegt das Minimum an null, obwohl die Funktion dort nicht differenzierbar ist. Beide Beispiele grenzen die Voraussetzungen deutlich ab.

Das Wort „Kandidat“ ist daher nützlich. Bestimmen Sie kritische Stellen, Randpunkte und mögliche zulässige Singularitäten und

vergleichen Sie anschließend ihre Werte oder das Monotonieverhalten. Bei einem unbeschränkten Definitionsbereich müssen auch Grenzwerte untersucht werden. Eine Funktion kann eine obere Schranke besitzen, ohne sie anzunehmen: f(x) = 1 − e^(−x) auf [0; +∞) nähert sich 1, nimmt diesen Wert aber nie an.

8. Ableitungen und Bewegung: Weglänge oder Ortsänderung?

Ein fiktiver Ort ist $x(t) = 12t - t^3$ für t in [0; 3], mit passenden Koeffizienten und Einheiten. Die Geschwindigkeit beträgt $v(t) = 12 - 3t^2$ und die Beschleunigung $a(t) = -6t$. Die Geschwindigkeit ist vor t = 2 s positiv, zu diesem Zeitpunkt null und anschließend negativ. Der Ort steigt bis x(2) = 16 m und fällt dann bis x(3) = 9 m.

Die Ortsänderung zwischen null und drei Sekunden beträgt 9 m. Die zurückgelegte Weglänge ist 16 + (16 − 9) = 23 m, weil sich die Richtung ändert. Durch Ableiten des Orts und Untersuchung des Geschwindigkeitsvorzeichens lässt sich somit eine geometrische Frage zum Weg beantworten. Nur x(3) − x(0) als Weglänge zu verwenden, würde die Rückbewegung vergessen.

Das Vorzeichen der Beschleunigung zeigt nicht unmittelbar, ob der Geschwindigkeitsbetrag zu- oder abnimmt. Vor der Umkehr gilt v > 0 und a < 0: Der Betrag der Geschwindigkeit nimmt ab. Danach gilt v < 0 und a < 0: Er nimmt zu. Diese Verbindung zur Physik zeigt, warum Vorzeichen und Vektoren gedeutet und nicht bloß berechnet werden müssen. Die Ableitung liefert eine Beziehung; die Bedeutung der Variablen liefert die Antwort auf das Problem.

9. Eine Ableitung auf mehreren Wegen kontrollieren

Eine Kontrolle kann die Struktur, das erwartete Vorzeichen und einen numerischen Differenzenquotienten nutzen. Bei f(x) = e^(−2x) wäre eine positive Ableitung verdächtig, weil die Funktion fällt. Die richtige Formel lautet −2e^(−2x). Bei einem Polynom sinkt der Grad der Ableitung um eins, wenn der führende Term nicht konstant ist. Suchen Sie bei einer Verkettung ausdrücklich den häufig vergessenen inneren Faktor.

Ein Differenzenquotient mit kleinem h kann einen Ableitungswert kontrollieren: [f(a + h) − f(a)]/h sollte sich f'(a) nähern. Er beweist nicht die Formel auf dem gesamten Definitionsbereich und kann bei zu kleinem h unter Rundungsfehlern leiden. Ein zentraler Differenzenquotient [f(a + h) − f(a − h)]/(2h) kann nützlich sein, verlangt aber, dass beide Stellen im Definitionsbereich liegen.

Die Übereinstimmung der Dimensionen bietet eine weitere Kontrolle. Bei einem Problem zur Fläche in Abhängigkeit von einer Länge weist eine in m² statt in m angegebene Ableitung auf einen Darstellungs- oder Einheitenfehler hin. Unabhängiges Prüfen bedeutet nicht, dieselbe Rechnung mit denselben Schritten zu kopieren: Suchen Sie eine Eigenschaft oder ein Verfahren, das eine andere Fehlerart aufdecken kann.

10. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Produkt und Verkettung. Leiten Sie f(x) = x²e^(3x) auf den reellen Zahlen ab. **Lösung:** f' = 2xe^(3x) + 3x²e^(3x) = xe^(3x)(2 + 3x). Der Faktor 3 stammt vom inneren Ausdruck. Die Nullstellen der Ableitung sind 0 und −2/3; ihre Art verlangt noch eine Vorzeichentabelle.

B - Quotient. Leiten Sie g(x) = (x + 1)/(x − 2) ab. **Lösung:** Der Definitionsbereich schließt 2 aus, und g' = [(x − 2) − (x + 1)]/(x − 2)² = −3/(x − 2)². Die Funktion fällt auf jedem Intervall ihres

Definitionsbereichs, ohne dass daraus globales Fallen auf deren Vereinigung gefolgert werden darf.

C - Tangente. Geben Sie für $f(x) = x^2 + 1$ die Tangente an $a = -1$ an. **Lösung:** $f(-1) = 2$ und $f'(-1) = -2$, also $y = 2 - 2(x + 1) = -2x$. Die Gerade verläuft tatsächlich durch $(-1; 2)$. Eine negative Steigung bedeutet nicht, dass die zweite Koordinate des Punkts negativ ist.

D - Extremwerte. Untersuchen Sie $h(x) = x^3 - 3x$ auf $[-2; 2]$. **Lösung:** $h' = 3(x^2 - 1)$, positiv außerhalb von $[-1; 1]$ und negativ im Inneren. Die Kandidatenwerte sind $h(-2) = -2$, $h(-1) = 2$, $h(1) = -2$ und $h(2) = 2$. Das globale Maximum 2 wird an zwei Stellen angenommen, ebenso das Minimum -2. Ein globaler Extremwert ist nicht notwendigerweise eindeutig.

E - Definitionsbereich. Leiten Sie $k(x) = \ln(2 - x)$ ab. **Lösung:** Der Definitionsbereich lautet $x < 2$, und $k' = -1/(2 - x)$. Die Funktion fällt dort streng monoton. Die Darstellung $1/(2 - x)$ würde die innere Ableitung vergessen; die Untersuchung von $x > 2$ würde den reellen Definitionsbereich des Logarithmus vergessen.

F - Näherung. Schätzen Sie $(3{,}02)^2$ mit der Tangente an x^2 bei 3 und geben Sie anschließend die exakte Abweichung an. **Lösung:** Die Näherung lautet $9 + 6 \times 0{,}02 = 9{,}12$. Der exakte Wert beträgt 9,1204; die Abweichung ist $(0{,}02)^2 = 0{,}0004$. Der Rest lässt sich hier berechnen, weil die Funktion ausdrücklich bekannt ist.

11. Wiederholung und Quellen

Nützliches Wiederholen umfasst vier Tätigkeiten: den Definitionsbereich bestimmen, mit der richtigen Struktur ableiten, Vorzeichen auf Intervallen untersuchen und anschließend Extremwerte sowie Nebenbedingungen deuten. Wiederholen Sie eine Ableitung ohne Formelsammlung und erklären Sie jeden Faktor. Prüfen Sie bei einer Optimierung, ob die Zielfunktion sämtliche gezählten Größen richtig darstellt, und anschließend, ob die Lösung zum zulässigen Definitionsbereich gehört.

Bezugsrahmen des Lernwegs: der veröffentlichte Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm ; Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Sämtliche Erklärungen und Situationen sind eigenständige LFDP-Texte, ohne wiedergegebene Prüfungsaufgaben oder Lehrbuchtexte. Die Anwendungen unterstützen das Verständnis der Verfahren und zertifizieren keine reale Anlage, keinen Fertigungsprozess und keine Vorhersage.

Kapitel 6 - Konvexität: eine Kurve mit ihren Sehnen und Tangenten vergleichen

Historischer Bezug - Jensen: Konvexität ermöglicht Vergleiche

Im Jahr 1906 veröffentlichte Johan Ludwig Jensen in den Acta Mathematica eine Ungleichung zu konvexen Funktionen. Dieser Bezug gibt dem zentralen Gedanken dieses Kapitels einen Zusammenhang: Die Form einer Funktion erzwingt Vergleiche zwischen Werten, Sehnen und Tangenten. Wir arbeiten hier mit bewiesenen Eigenschaften und Kriterien auf dem vorgesehenen Niveau, ohne die allgemeine Form der Jensen-Ungleichung zu einer zusätzlichen Prüfungsanforderung zu machen. Die Geschichte erinnert an den Nutzen der Konvexität; weder eine Veranschaulichung noch ein berühmter Name entbindet jemals von der Prüfung des Intervalls und der Voraussetzungen.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jensen/

1. Eine andere Eigenschaft als Wachstum und Fallen

Das Monotonieverhalten beschreibt, ob die Werte einer Funktion zu- oder abnehmen. Konvexität beschreibt eine andere Struktur: die Lage ihrer Kurve gegenüber den Sehnen, die zwei ihrer Punkte verbinden. Eine konvexe Funktion kann zunächst fallen und dann wachsen oder auf ihrem gesamten Definitionsbereich fallen. „Konvex“ als Synonym für „wachsend“ zu verwenden, ist deshalb falsch.

Bei $f(x) = (x - 1)^2$ fällt die Funktion bis 1 und wächst anschließend, ist aber auf allen reellen Zahlen konvex. Bei $f(x) = e^{(-x)}$ ist sie fallend und konvex. Diese Beispiele trennen zwei Fragen, die eine

Zeichnung manchmal verwischt. In einer vollständigen Untersuchung liefert das Vorzeichen von f' Informationen über Wachstum und Fallen; das Monotonieverhalten von f' und, sofern vorhanden, das Vorzeichen von f'' liefern Informationen über die Konvexität.

Der Nutzen ist konkret. Konvexität ermöglicht den Vergleich von Werten, ohne jeden exakt zu berechnen, grenzt eine Funktion mithilfe von Geraden ein und begründet bestimmte Ungleichungen. Sie erklärt auch die Optimierung: Bei einer differenzierbaren konvexen Funktion ist eine innere Stelle mit verschwindender Ableitung ein globales Minimum auf dem betrachteten Intervall. Die Prüfung, ob diese Stelle zum Definitionsbereich des Problems gehört, bleibt wesentlich.

2. Definition mithilfe von Sehnen

Eine Funktion f ist auf einem Intervall I konvex, wenn für alle a und b in I und jedes λ in [0; 1] die Ungleichung $f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$ gilt. Die Stelle $(1 - \lambda)a + \lambda b$ liegt zwischen a und b. Die rechte Seite ist die zweite Koordinate des zugehörigen Punkts auf der Sehne des Graphen. Die Kurve liegt somit unterhalb dieser Sehne.

Bei einer konkaven Funktion ist die Ungleichung umgekehrt. Eine affine Funktion ist zugleich konvex und konkav, denn die Kurve und sämtliche Sehnen stimmen überein. Strenge Konvexität verlangt eine strenge Ungleichung für $a \neq b$ und $0 < \lambda < 1$. Diese Unterscheidung trennt eine allgemeine Struktur vom Fehlen affiner Teilstücke.

Am Mittelpunkt, $\lambda = 1/2$, ergibt die Definition $f((a + b)/2) \leq [f(a) + f(b)]/2$. Für $f(x) = x^2$ wird daraus $((a + b)/2)^2 \leq (a^2 + b^2)/2$. Durch Ausmultiplizieren zeigt sich, dass die Differenz zwischen rechter und linker Seite $(a - b)^2/4$ beträgt und damit nichtnegativ ist.

Dieser direkte Beweis bestätigt eine bestimmte Ungleichung und macht die Rolle des Unterschieds zwischen a und b sichtbar.

Das Mittel der Funktionswerte ist daher im Allgemeinen nicht der Funktionswert des Mittels. Eine automatische Gleichheit gilt nur in besonderen Situationen, insbesondere bei einer affinen Funktion. Dieser Unterschied ist bei Anwendungen nützlich; eine praktische Schlussfolgerung verlangt aber zusätzlich die Prüfung, ob die gewählte Funktion das untersuchte Phänomen tatsächlich darstellt.

3. Das Ableitungskriterium und zweite Ableitungen

Auf einem Intervall, auf dem f differenzierbar ist, gilt: f ist genau dann konvex, wenn f' monoton wächst. Ist f zweimal differenzierbar, stellt eine nichtnegative zweite Ableitung auf dem Intervall Konvexität sicher, eine nichtpositive Konkavität. Die zweite Ableitung beschreibt die Veränderung der Steigung. Eine negative Steigung, die weniger negativ wird, kann deshalb Konvexität entsprechen.

Für f(x) = e^(−x) ist f' = −e^(−x) negativ, wächst aber, denn f'' = e^(−x) > 0. Die Funktion fällt immer langsamer. Für f(x) = ln(x) auf x > 0 ist f' = 1/x positiv, fällt aber, und f'' = $-1/x^2$ < 0: Der Logarithmus wächst mit abnehmender Steigung. Monotonieverhalten und Konvexität liefern somit zwei einander ergänzende Arten von Informationen.

Das Vorzeichen muss auf einem Intervall untersucht werden, nicht nur an einer Stelle. f''(a) > 0 liefert eine lokale Information, wenn passende Voraussetzungen ihre Übertragung auf eine Umgebung erlauben, beweist aber keine Konvexität auf dem gesamten Definitionsbereich. Ebenso kann die zweite Ableitung an manchen Stellen einer dennoch konvexen Funktion fehlen: |x| ist ein Beispiel. Die Definition über Sehnen ist allgemeiner als das praktische Kriterium mit der zweiten Ableitung.

4. Tangenten und der Beweis einer Ungleichung

Bei einer differenzierbaren konvexen Funktion liegt die Kurve auf dem Konvexitätsintervall oberhalb jeder ihrer Tangenten. An der Stelle a lautet dies f(x) ≥ f(a) + f'(a)(x − a). Bei einer konkaven Funktion liegt die Kurve darunter. „Unterhalb der Sehnen“ und „oberhalb der Tangenten“ widersprechen sich nicht: Eine Sehne verbindet zwei verschiedene Punkte, während eine Tangente eine lokale Steigung beschreibt.

Eine Begründung für das Ergebnis bei konvexen Funktionen definiert h(x) = f(x) − f(a) − f'(a)(x − a). Die Ableitung lautet f'(x) − f'(a). Weil f' monoton wächst, ist h' vor a nichtpositiv und nach a nichtnegativ. Somit nimmt h sein Minimum an a an, wo h(a) = 0 gilt. Daraus folgt h(x) ≥ 0. Der Beweis nutzt das Verhalten einer Hilfsfunktion und liefert ein wiederverwendbares Werkzeug.

Bei f(x) = e^x lautet die Tangente an null y = 1 + x. Aus der Konvexität folgt daher e^x ≥ 1 + x für jede reelle Zahl x. Diese Ungleichung ist eine Schranke und keine immer genaue Näherung. Für sehr negative x kann die Gerade negativ sein, während die Exponentialfunktion positiv bleibt. Nahe null liefert sie eine lokale Näherung, deren Fehler weiter untersucht werden muss.

5. Den Logarithmus eingrenzen

Der Logarithmus ist auf den positiven reellen Zahlen konkav. Seine Tangente an 1 lautet y = x − 1. Wir erhalten ln(x) ≤ x − 1 für x > 0, mit Gleichheit an 1. Ersetzen wir x durch 1 + h, folgt ln(1 + h) ≤ h für h > −1. Der Definitionsbereich ist wesentlich; ln(1 + h) ist für h ≤ −1 nicht reell.

Eine weitere Tangente liefert eine untere Schranke. Wir betrachten die Tangente an ln an der Stelle x > 0 und werten ihre obere Schranke an 1 aus: ln(1) ≤ ln(x) + (1/x)(1 − x). Wegen ln(1) = 0

erhalten wir $\ln(x) \geq 1 - 1/x$. Zusammen ergeben die beiden Schranken $1 - 1/x \leq \ln(x) \leq x - 1$ für $x > 0$.

Für $x = 1{,}10$ lauten diese Schranken $0{,}090909\ldots \leq \ln(1{,}10) \leq 0{,}10$. Der Zahlenwert beträgt ungefähr 0,09531. Die Schranken hängen nicht von diesem letzten Wert ab: Sie werden vor der Näherungsrechnung bewiesen. Für x weit von 1 können die Schranken ungenau sein. Eine gültige Schranke ist nicht notwendigerweise die beste Schranke für jede Frage.

6. Wendepunkte: eine Veränderung der Konvexität

Ein Wendepunkt ist mit einem Wechsel der Konvexität nahe einem Punkt der Kurve verbunden. Bei einer ausreichend regulären Funktion lässt er sich oft durch einen Vorzeichenwechsel von f'' auf beiden Seiten erkennen. Die Gleichheit f''(a) = 0 allein genügt nicht. Vorzeichen oder Konvexität in der Umgebung müssen untersucht werden, und der Punkt muss zur Kurve gehören.

Für $f(x) = x^3$ wechselt $f''(x) = 6x$ an null das Vorzeichen: Die Funktion ist links konkav und rechts konvex. Der Ursprung ist ein Wendepunkt. Für g(x) = x^4 verschwindet $g''(x) = 12x^2$ an null, bleibt aber auf beiden Seiten positiv; die Konvexität wechselt nicht. Null ist eine Minimumstelle, kein Wendepunkt.

Eine aus dem Definitionsbereich ausgeschlossene Stelle kann kein Wendepunkt auf der Kurve sein, selbst wenn die Vorzeichen von f'' auf zwei getrennten Intervallen verschieden sind. Bei 1/x wechselt die zweite Ableitung $2/x^3$ auf beiden Seiten von null das Vorzeichen, die Funktion ist an null aber undefiniert. Die richtige Schlussfolgerung betrifft die Konvexität auf jedem Intervall, nicht einen nicht vorhandenen Punkt.

7. Ein Polynom ausführlich untersuchen

Betrachten wir f(x) = x^4 − 4x³. Die Ableitungen lauten f'(x) = 4x²(x − 3) und f''(x) = 12x(x − 2). Das Vorzeichen von f'' ist für x < 0 positiv, für 0 < x < 2 negativ und danach für x > 2 positiv. Die Funktion ist auf diesen Intervallen also zunächst konvex, dann konkav und anschließend konvex. Die Punkte mit den Koordinaten (0; 0) und (2; −16) sind Wendepunkte.

Die erste Ableitung ist für x < 3 negativ, außer dass sie an der einzelnen Stelle null verschwindet, und für x > 3 positiv. Die Funktion fällt bis 3 und wächst danach; sie hat ein Minimum bei x = 3 mit dem Wert −27. Der Wendepunkt an null ist daher kein Extremum. Derselbe Graph veranschaulicht, warum eine Ableitung von null, ein Extremum und ein Wendepunkt drei verschiedene Begriffe sind.

Die Tangente an 2 hat die Steigung f'(2) = −16 und verläuft durch (2; −16). Ihre Gleichung lautet y = −16 − 16(x − 2) beziehungsweise y = −16x + 16. Die Kontrolle von Steigung und Punktzugehörigkeit ist wesentlich. Nahe einem Wendepunkt verändert die Kurve in diesem regulären Fall ihre Lage gegenüber der Tangente; falls die Frage es verlangt, kann dies direkt durch Faktorisieren der Differenz untersucht werden.

Bei der Tangente an null sind Steigung und zweite Koordinate beide null: Sie ist die waagerechte Achse. Nahe null ist f(x) = x³(x − 4) links positiv und rechts negativ. Die Kurve kreuzt daher in diesem Beispiel ihre Tangente. Diese lokale Beobachtung darf ohne die erforderlichen Regularitätsvoraussetzungen nicht zu einem allgemeinen Kriterium gemacht werden.

8. Konvexität und ein globales Minimum

Ist f auf einem Intervall konvex und differenzierbar und gilt f'(a) = 0 an einer inneren Stelle a, ergibt die Tangentenungleichung f(x) ≥ f(a) für jedes x des Intervalls. a ist daher eine globale Minimumstelle. Ist f streng konvex, ist dieses Minimum eindeutig. Der Beweis erklärt, warum eine lokale Steigungseigenschaft hier eine globale Schlussfolgerung erzeugen kann: Die Konvexität liefert die zusätzliche Information.

Für $f(x) = x^2 + 8/x$ auf $x > 0$ gilt $f''(x) = 2 + 16/x^3 > 0$. Die Funktion ist streng konvex. Ihre Ableitung $2x - 8/x^2$ verschwindet für $x^3 = 4$, also an a = der Kubikwurzel aus 4. Diese Stelle liefert das eindeutige globale Minimum. Zur Begründung der Eindeutigkeit ist keine weitere lange Monotonietabelle nötig, auch wenn Grenzwerte oder eine Tabelle als Kontrolle dienen können.

Ist der zulässige Definitionsbereich ein Teilintervall ohne a, muss das Minimum auf diesem Bereich gesucht werden. Konvexität macht einen ausgeschlossenen Wert nicht zulässig. Eine Anwendung verlangt daher zwei Ebenen: die mathematische Funktion verstehen und anschließend die Nebenbedingungen des Problems beachten. Ein theoretisches Optimum bestätigt keine reale Entscheidung, deren Kosten oder Risiken nicht modelliert wurden.

9. Mittelwerte und Streuung: ein eigenständiges Beispiel

Betrachten wir zwei Messwerte a und b. Aus der Konvexität der Quadratfunktion folgt, dass das Quadrat ihres Mittels kleiner oder gleich dem Mittel ihrer Quadrate ist. Die Differenz beträgt $(a - b)^2/4$. Für a = 2 und b = 6 beträgt das Quadrat des Mittels 16 und das Mittel der Quadrate 20; die Differenz ist 4. Dieser Unterschied hängt mit der Streuung zusammen und verschwindet nur, wenn die beiden Werte übereinstimmen.

Für mehrere Zahlen mit positiven Gewichten, deren Summe 1 ist, vergleicht eine Erweiterung der Konvexitätsungleichung den Funktionswert des gewichteten Mittels mit dem gewichteten Mittel der Funktionswerte. Diese häufig als Jensen-Ungleichung bezeichnete Erweiterung dient der Vertiefung; sie ist keine behauptete besondere Prüfungsanforderung. Sie lässt sich durch wiederholte Anwendung der Zweipunktdefinition beweisen.

Der praktische Geltungsbereich hängt vom Modell ab. Ist ein fiktiver Verbrauch proportional zum Quadrat einer Geschwindigkeit, kann eine wechselnde Geschwindigkeit bei gleichem Mittelwert den mittleren Verbrauch erhöhen. Daraus ergibt sich keine Bilanz eines realen Fahrzeugs, ohne Dauer, Entfernung, Beschleunigung und die tatsächlichen Mechanismen zu berücksichtigen. Die mathematische Ungleichung bleibt exakt; ihre empirische Deutung benötigt zusätzliche Daten.

10. Eine Konvexitätstabelle lesen und aufstellen

Eine effiziente Untersuchung beginnt mit dem Definitionsbereich und den Intervallen, auf denen die Ableitungen existieren. Berechnen Sie f'', faktorisieren Sie nach Möglichkeit und untersuchen Sie das Vorzeichen. Folgern Sie daraus die Intervalle der Konvexität und Konkavität und prüfen Sie anschließend mögliche Wendepunkte. Für ihre Koordinaten muss f noch an den ausgewählten ersten Koordinaten ausgewertet werden.

Verwechseln Sie nicht die Vorzeichentabelle von f mit den Tabellen für f' und f''. Die erste beschreibt positive und negative Funktionswerte, die zweite Wachstum und Fallen, die dritte unter den angegebenen Voraussetzungen die Konvexität. Eine negative Funktion kann konvex sein; eine positive kann konkav sein; ein Wendepunkt kann eine von null verschiedene zweite Koordinate besitzen. Die drei Tabellen beantworten verschiedene Fragen.

In einem Diagramm kann es helfen, zu betrachten, ob die Steigung zu- oder abnimmt. Dies bleibt eine qualitative Kontrolle, die vom Maßstab und der Genauigkeit der Zeichnung abhängt. Eine auf einem exakten Ausdruck beruhende Tabelle liefert eine stärkere Begründung. Wenn nur eine grafische Darstellung gegeben ist, formulieren Sie die Schlussfolgerungen in der von ihr erlaubten Genauigkeit und benennen die bei ihrer Deutung gemachten Annahmen.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Monotonie und Konvexität. Untersuchen Sie beide Eigenschaften für e^(−2x). **Lösung:** f' = −2e^(−2x) < 0 und f'' = 4e^(−2x) > 0. Die Funktion fällt und ist streng konvex. Diese Eigenschaften sind keine Gegensätze.

B - Tangente an den Logarithmus. Geben Sie die Tangente an ln(x) bei 2 an und vergleichen Sie sie mit der Funktion. **Lösung:** y = ln(2) + (x − 2)/2. Aus der Konkavität folgt ln(x) ≤ ln(2) + (x − 2)/2 für x > 0. Das Ergebnis gilt im gesamten Konkavitätsbereich und nicht nur in einer kleinen Umgebung von 2.

C - Wendepunkt. f(x) = x^5. **Lösung:** f''(x) = 20x³ wechselt an null das Vorzeichen. Der Ursprung ist ein Wendepunkt. Die erste Ableitung 5x^4 ist nichtnegativ; die Funktion wächst weiterhin. Dies bestätigt, dass ein Wendepunkt nicht notwendigerweise die Veränderungsrichtung wechselt.

D - Exponentielle Schranke. Zeigen Sie e^(2x) ≥ 1 + 2x. **Lösung:** Wenden Sie die Ungleichung e^t ≥ 1 + t auf t = 2x an oder verwenden Sie die Tangente an die Funktion e^(2x) an null. Beide Wege liefern dieselbe Schranke unter Voraussetzungen, die auf allen reellen Zahlen gelten.

E - Mittelwert. Vergleichen Sie für 1 und 5 das Quadrat des Mittels mit dem Mittel der Quadrate. **Lösung:** Das Mittel beträgt 3, sein

Quadrat 9; das Mittel der Quadrate ist (1 + 25)/2 = 13. Die Differenz 4 ist gleich (5 − 1)²/4. Das Mittel der Quadrate durch das Quadrat des Mittels zu ersetzen, würde somit eine Information über die Streuung entfernen.

F - Eine Nullstelle von f''. Bei einer Funktion gilt f''(a) = 0. Darf auf einen Wendepunkt geschlossen werden? **Lösung:** Nein. Ein Wechsel der Konvexität muss begründet werden. Das Gegenbeispiel x^4 an null zeigt, dass eine Nullstelle der zweiten Ableitung allein nicht genügt.

12. Wiederholung und Quellen

Wiederholen Sie Konvexität anhand dreier Darstellungen: die Kurve unterhalb von Sehnen, die Kurve oberhalb von Tangenten und eine monoton wachsende Ableitung. Sie sollten eine Darstellung in eine Ungleichung umsetzen und anschließend ihren Definitionsbereich erklären können. Prüfen Sie bei Wendepunkten den Wechsel der Konvexität und die Koordinaten. Ein Heft mit den Gegenbeispielen x^4, |x| und 1/x hilft, die genauen Voraussetzungen beizubehalten.

Rahmen des Lernwegs: der veröffentlichte offizielle Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Beweise, Beispiele und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Texte. Vertiefungen werden ausdrücklich von einer Ankündigung von Prüfungsinhalten unterschieden; weder Lehrbuch noch Aufgabenblatt Dritter werden wiedergegeben.

Kapitel 7 - Exponentialfunktionen, Logarithmen und Trigonometrie: umformen, ohne den Definitionsbereich zu verlieren

Historischer Bezug - Napier: eine schwierige Rechnung umformen

John Napier stellte seine Logarithmen in einem 1614 veröffentlichten Buch vor, um lange Rechnungen zu vereinfachen. Seine Logarithmen sind nicht mit dem heute gelehrten natürlichen Logarithmus identisch. Der nützliche Vergleich betrifft die Umformung eines Problems: Ein Produkt durch eine Summe zu ersetzen, kann eine Beziehung leichter untersuchbar machen, aber nur, wenn die Voraussetzungen des Logarithmus erfüllt sind. Das Kapitel unterscheidet deshalb Identitäten, ihre Definitionsbereiche und ihre Verwendung in Gleichungen oder Modellen. Ein Rechenwerkzeug wird leistungsfähiger, wenn wir verstehen, was es erhält und was es voraussetzt.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Napier/

1. Drei Familien und drei Strukturen

Die Exponentialfunktion beschreibt insbesondere Veränderungen, die proportional zum aktuellen Wert sind. Der Logarithmus verwandelt multiplikative Verhältnisse in additive Differenzen und ermöglicht die Umkehrung der Exponentialfunktion bei positiven Werten. Trigonometrie stellt Winkel, Projektionen und periodische Veränderungen dar. Diese Funktionen können im selben Problem auftreten, erfüllen aber nicht dieselben Identitäten und haben nicht dieselben Definitionsbereiche.

Ein verlässliches Verfahren bestimmt vor einer Umformung den Definitionsbereich und erkennt anschließend die Struktur: Produkt, Potenz, Verkettung oder Periodizität. Eine Ähnlichkeit im Diagramm genügt nicht zur Wahl eines Gesetzes. Exponentielles Wachstum ist kein beschleunigtes lineares Wachstum; eine Sinuskurve stellt nicht jede reale Schwingung dar; ein Logarithmus erlaubt nicht, seine Produktregeln auf Summen anzuwenden.

Auch die Argumente der Funktionen verlangen eine Deutung. In einem Modell e^(kt) muss das Produkt kt dimensionslos sein. Wird t in Sekunden angegeben, hat k die Einheit s^−1. Bei ln(q/q_0) ist das Verhältnis zweier Größen mit derselben Einheit dimensionslos. Den Logarithmus eines Zahlenwerts zu schreiben, setzt eine Einheitenkonvention oder eine Normierung voraus; andernfalls kann ein willkürlicher Einheitenwechsel den berechneten Wert verändern.

2. Die Exponentialfunktion: Eigenschaften und Wachstum

Die Exponentialfunktion ist auf den reellen Zahlen definiert, streng positiv und streng monoton wachsend. Sie erfüllt e^0 = 1, e^(a+b) = e^a e^b und e^(−a) = 1/e^a. Ihre Ableitung ist sie selbst; bei e^(u(x)) lautet die Ableitung u'(x)e^(u(x)). Die algebraischen Eigenschaften erlauben die Umformung eines Produkts oder Quotienten, nicht das Addieren der Exponenten in einer Summe von Exponentialausdrücken.

So ist e^a + e^b nicht gleich e^(a+b). Für a = b = 0 beträgt der erste Ausdruck 2 und der zweite 1. Ebenso gilt e^(2x) = (e^x)², doch e^(x²) ist nicht (e^x)². Die Position der Klammern beschreibt verschiedene Funktionen. Ein einfaches Gegenbeispiel kann eine zweifelhafte Identität erkennen, bevor sie sich durch eine ganze Rechnung zieht.

Die Grenzwerte lauten e^x → +∞ für x → +∞ und e^x → 0 für x → −∞. Die Exponentialfunktion ist bei keiner endlichen reellen Zahl gleich null. Zeigt ein Taschenrechner bei einem sehr negativen Wert null an, kann seine Darstellungsgrenze erreicht sein; die Anzeige ist keine neue mathematische Eigenschaft.

3. Eine Exponentialgleichung durch Substitution lösen

Betrachten wir e^(2x) − 5e^x + 6 = 0. Wir setzen Y = e^x mit Y > 0. Die Gleichung wird zu Y² − 5Y + 6 = 0 beziehungsweise (Y − 2)(Y − 3) = 0. Beide Kandidaten, 2 und 3, erfüllen den Definitionsbereich von Y. Weil die Exponentialfunktion eine Bijektion von den reellen auf die positiven reellen Zahlen ist, lauten die Lösungen x = ln(2) und x = ln(3).

Die Substitution entfernt die Forderung an den Definitionsbereich nicht. Lieferte ein anderes Polynom eine negative Nullstelle Y, entspräche sie keinem reellen e^x. Zuerst wird die algebraische Gleichung gelöst; dann werden die Kandidaten gefiltert und die ursprüngliche Variable wieder eingeführt. Diese Schritte sollten in der Lösung erscheinen, um zu zeigen, dass alle und nur die gültigen Lösungen erhalten wurden.

Bei der Ungleichung e^(2x) − 5e^x + 6 ≤ 0 ergibt die Vorzeichentabelle des Polynoms 2 ≤ Y ≤ 3. Der wachsende Logarithmus erlaubt die Folgerung ln(2) ≤ x ≤ ln(3). Eine Gleichung liefert Punkte, eine Ungleichung hier ein Intervall. Nur die beiden Nullstellen als Lösungsmenge der Ungleichung zu übernehmen, würde nicht genügen.

4. Der Logarithmus: Umkehrfunktion und exakte Regeln

Der natürliche Logarithmus ist auf den streng positiven reellen Zahlen definiert. Er ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion: ln(e^x) = x für jedes reelle x und e^(ln y) = y für y > 0. Er wächst streng monoton und besitzt die Ableitung 1/x. Sein Wert an 1 ist null; zwischen null und eins ist er negativ und oberhalb von eins positiv.

Für a > 0 und b > 0 gilt ln(ab) = ln(a) + ln(b). Dies lässt sich durch Exponentieren der Summe begründen: e^(ln a + ln b) = ab; anschließend wird die Eindeutigkeit des Urbilds unter der Exponentialfunktion verwendet. Ebenso ergibt sich ln(a/b) = ln(a) − ln(b). Für eine ganzzahlige Potenz einer positiven Basis folgt die Regel durch Wiederholung; für eine durch a^r = e^(r ln a) definierte reelle Potenz liefert sie ln(a^r) = r ln(a).

Definitionsbereiche vereinfachen sich nicht automatisch mit der Formel. Für x ≠ 0 gilt ln(x²) = 2ln(|x|), weil |x| positiv ist. Die Darstellung 2ln(x) würde negative x ausschließen, obwohl x² positiv ist. Bei ln(x) + ln(y) müssen beide Argumente positiv sein; xy > 0 allein reicht nicht aus, wenn x und y beide negativ sind.

5. Logarithmische Gleichungen und Kontrolle

Lösen wir ln(x − 1) + ln(x + 1) = ln(8). Der Definitionsbereich verlangt x − 1 > 0 und x + 1 > 0, also x > 1. Dort wird die Summe zu ln(x² − 1). Die Injektivität des Logarithmus liefert x² − 1 = 8 beziehungsweise x² = 9. Die Kandidaten sind 3 und −3, doch nur 3 erfüllt den ursprünglichen Definitionsbereich.

Bei ln(x − 1) + ln(x + 1) ≤ ln(8) ergibt der wachsende Logarithmus x² − 1 ≤ 8 auf x > 1. Die Lösungsmenge lautet (1; 3]. Sie ist nicht [−3; 3], weil die ursprünglichen Argumente positiv bleiben müssen. Der Definitionsbereich ist eine bei jeder Umformung erhaltene Bedingung und keine freiwillige Kontrolle am Ende einer Rechnung.

Eine Gleichung ln(u(x)) = 0 ist zu u(x) = 1 äquivalent, wenn der Logarithmus definiert ist. Eine Gleichung ln(u(x)) = ln(v(x)) verlangt u > 0 und v > 0, bevor u = v gefolgert werden darf. Nur u = v zu lösen, kann Stellen hinzufügen, an denen beide Ausdrücke negativ sind. Die Folge der Schritte muss daher die Positivitätsbedingungen erhalten.

6. Multiplikatives Wachstum und eine ganzzahlige Schwelle

Eine fiktive Entwicklung mit einem Zuwachs von 5 % auf jeder Stufe folgt q_n = q_0(1,05)^n, sofern Modell und Prozentsatz konstant bleiben. Zur Suche nach dem ersten Index mit q_n ≥ 2q_0 bei q_0 > 0 ergibt sich (1,05)^n ≥ 2 und anschließend n ≥ ln(2)/ln(1,05), ungefähr 14,21. Die erste zulässige ganze Zahl ist 15.

Die Kontrolle liefert (1,05)^14 ≈ 1,980 und (1,05)^15 ≈ 2,079. Der Index 14 reicht nicht aus, 15 reicht aus. Beide Vergleiche begründen die Minimalität im Modell. Der Gedankengang bleibt rein mathematisch: Ohne Bestätigung der Veränderungsregel sagt er keine tatsächliche Rendite, Population oder Kapazität voraus.

Bei einer Abnahme mit einem Faktor zwischen null und eins ist der Logarithmus des Faktors negativ, und die Division kehrt die Ungleichung um. Dies ist der entscheidende Punkt in vielen Schwellenproblemen. Eine Antwort lässt sich prüfen, indem die beiden benachbarten Indizes in den ursprünglichen Ausdruck eingesetzt werden, statt einer zu schnell abgeschriebenen Vorzeichenfolge zu vertrauen.

7. Logarithmen zu verschiedenen Basen

Für eine Basis $a > 0$ mit $a \neq 1$ ist der Logarithmus zur Basis a definiert durch $\log_a(x) = \ln(x)/\ln(a)$ für $x > 0$. Er wächst für $a > 1$ und fällt für $0 < a < 1$. Der dekadische Logarithmus entspricht $a = 10$. Ein Basiswechsel ermöglicht die Nutzung eines Taschenrechners, der nur ln oder den dekadischen Logarithmus anbietet.

Die Multiplikation eines Verhältnisses mit 100 erhöht seinen dekadischen Logarithmus um 2. Diese Struktur erklärt den Nutzen einer logarithmischen Skala für den Vergleich von Größenordnungen. Ist ein Pegel durch $10\log_{10}(I/I_0)$ definiert, erhöht eine Multiplikation von I mit 100 den Pegel um 20, bei demselben Bezugswert I_0. Das bedeutet nicht, dass die physikalische Größe mit 20 multipliziert wurde.

Eine Differenz von Logarithmen entspricht dem Logarithmus eines Verhältnisses. Die Addition logarithmischer Pegel stellt daher nicht automatisch eine Addition physikalischer Größen dar. Um Intensitäten zu addieren, kehren wir zu den Intensitäten zurück und wenden danach die Pegeldefinition an. Die Skala zu deuten, ist ebenso wichtig wie die Tasten des Taschenrechners zu verwenden.

8. Winkel und der trigonometrische Kreis

Das Bogenmaß misst einen Winkel durch das Verhältnis von Bogenlänge und Kreisradius. Eine volle Umdrehung entspricht 2π Radiant beziehungsweise 360°. Eine halbe Umdrehung beträgt π Radiant und ein rechter Winkel $\pi/2$. Die üblichen Ableitungen von sin und cos verwenden im Bogenmaß ausgedrückte Argumente. Ein auf Grad eingestellter Taschenrechner kann daher Werte liefern, die nicht zur Formel passen, wenn diese Konvention vergessen wird.

Auf dem Einheitskreis hat ein zum Winkel x gehörender Punkt die Koordinaten (cos x; sin x). Die Identität $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ folgt aus seiner Zugehörigkeit zum Kreis. Kosinus ist gerade, Sinus ungerade; beide sind periodisch mit der Periode 2π. Ein trigonometrischer Wert bestimmt ohne Intervall oder weitere Informationen keinen eindeutigen Winkel.

Die Additionstheoreme verbinden Winkel: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ und $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$. Mit $a = b = x$ erhalten wir $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ und $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Diese Identitäten können einen Ausdruck umformen; sie dürfen nicht mit der falschen Aussage $\cos(a + b) = \cos a + \cos b$ verwechselt werden.

9. Eine trigonometrische Gleichung lösen

Die Gleichung $\cos x = 1/2$ hat die Lösungen $x = \pi/3 + 2k\pi$ oder $x = -\pi/3 + 2k\pi$ mit ganzzahligem k. Auf $[0; 2\pi]$ ergeben sich $\pi/3$ und $5\pi/3$. Der Kreis erklärt die beiden Familien durch Symmetrie. Nur $\pi/3$ zu schreiben, würde Lösungen auslassen; eine unendliche Familie ohne Filterung des Intervalls anzugeben, würde die gestellte Frage übersehen.

Für $\sin x = -\text{sqrt}(2)/2$ auf $[0; 2\pi]$ lauten die Lösungen $5\pi/4$ und $7\pi/4$. Der Sinus entspricht der zweiten Koordinate, daher liegen die Punkte in der unteren Kreishälfte. Die Kenntnis der Bezugswinkel und der Vorzeichen nach Quadranten ermöglicht die Rekonstruktion der Werte statt des Auswendiglernens einer ungegliederten Liste.

Periodizität verlangt Aufmerksamkeit an den Randpunkten. Erlaubt die Gleichung $x = 0$ und ist der Definitionsbereich $[0; 2\pi]$, kann 2π ebenfalls eine andere numerische Lösung sein, obwohl der Wert denselben Punkt auf dem Kreis bezeichnet. Auf $[0; 2\pi)$ ist er

ausgeschlossen. Die Intervallschreibweise muss deshalb bis zur abschließenden Antwort erhalten bleiben.

10. Ableitungen und Periodizität einer zusammengesetzten Funktion

Die üblichen Ableitungen lauten (sin x)' = cos x und (cos x)' = −sin x. Für f(x) = cos(3x) gilt f' = −3sin(3x). Die Periode beträgt 2π/3, denn ein Zuwachs von x um diesen Betrag erhöht das Argument um 2π. Die Frequenz einer Funktion cos(ωt) entspricht |ω|/(2π), wenn t eine Dauer und ω eine Kreisfrequenz in Radiant pro Zeiteinheit ist.

Die Funktion sin²x besitzt die Periode π, obwohl sin x die Periode 2π hat: Ein Vorzeichenwechsel des Sinus verändert sein Quadrat nicht. Eine Umformung kann somit die kleinste Periode verändern. Nicht jede Periode einer Funktion ist notwendigerweise ihre kleinste positive Periode. Unterscheiden Sie einen passenden Wert von der gesuchten grundlegenden Eigenschaft.

Für sin x + cos x liefert eine Identität sqrt(2)sin(x + π/4). Dieser Ausdruck zeigt eine Amplitude sqrt(2), eine Periode 2π und eine Phasenverschiebung. Die Summe zweier Sinusschwingungen gleicher Frequenz kann somit eine Sinusschwingung mit anderer Amplitude und Phase bleiben. Bei unterschiedlichen Frequenzen ist eine so einfache Reduktion im Allgemeinen nicht möglich.

11. Lokale Näherungen und Kontrollen

Nahe null liefert Differenzierbarkeit e^h ≈ 1 + h, ln(1 + h) ≈ h und sin h ≈ h mit geeigneten Definitionsbereichen und Konventionen. Diese Näherungen sind lokal. Bei sin h muss h im Bogenmaß angegeben sein. Sie werden nicht dadurch zu Gleichheiten, dass eine Aufgabe „klein“ sagt; bei Verwendung eines Zahlenwerts muss die benötigte Genauigkeit besprochen werden.

Konvexität liefert Informationen über das Vorzeichen mancher Differenzen. Es gilt e^h ≥ 1 + h, und aus der Konkavität des Logarithmus folgt ln(1 + h) ≤ h für h > −1. Die Näherungen sind auf diesen Definitionsbereichen somit eine untere beziehungsweise obere Schranke. Damit ist die Fehlergröße noch nicht bestimmt; engere Schranken oder eine Untersuchung des Restes können nötig sein.

Prüfen Sie zur Kontrolle einer Rechnung bekannte Werte: e^0 = 1, ln 1 = 0, sin 0 = 0, cos 0 = 1. Kontrollieren Sie Vorzeichen, Definitionsbereich und Periodizität. Eine Umformung, die eine dieser bekannten Eigenschaften verändert, muss erneut geprüft werden. Diese Strategie erkennt Fehler vor einer längeren Rechnung, ohne einen Beweis ersetzen zu wollen.

12. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen und Wiederholung

A - Exponentialfunktion. Lösen Sie e^(2x) = 7. **Lösung:** 2x = ln 7, also x = (ln 7)/2. Die Lösung von e^x = 7 mit anschließend vergessenem Faktor 2 würde einen anderen Wert ergeben. Die Positivität von 7 ermöglicht die Umformung.

B - Logarithmischer Definitionsbereich. Lösen Sie ln(3 − x) ≥ 0. **Lösung:** Der Definitionsbereich lautet x < 3. Der Logarithmus ist bei einem Argument von mindestens 1 nichtnegativ, also 3 − x ≥ 1 beziehungsweise x ≤ 2. Die Lösungsmenge lautet (−∞; 2] und liegt bereits im Definitionsbereich.

C - Identität. Vereinfachen Sie ln(5x) − ln(x) für x > 0. **Lösung:** ln(5x/x) = ln 5. Bei negativem x wären die ursprünglichen Ausdrücke über den reellen Zahlen nicht definiert. Das konstante Ergebnis erweitert den Definitionsbereich nicht automatisch.

D - Trigonometrie. Lösen Sie sin(2x) = 0 auf [0; π]. **Lösung:** 2x = kπ, also x = kπ/2. Nach Filterung ergeben sich 0, π/2 und π. Das

Intervall des Arguments ist [0; 2π], einschließlich beider Randpunkte.

E - Differentiation. Leiten Sie ln(1 + e^x) ab. **Lösung:** Das Argument ist auf allen reellen Zahlen positiv, und die Ableitung beträgt e^x/(1 + e^x). Sie liegt zwischen null und eins, was eine Kontrolle von Vorzeichen und Größe bietet.

F - Periode. Geben Sie eine Grundperiode von cos(4t) an. **Lösung:** 2π/4 = π/2. Der Wert 2π ist ebenfalls eine Periode, aber nicht die kleinste positive. Verwechseln Sie nicht Argument, Kreisfrequenz und Frequenz.

Wiederholen Sie, indem Sie Definitionsbereiche, Identitäten und Umformungen rekonstruieren, statt einzelne Gleichungen auswendig zu lernen. Geben Sie für jede Lösung an, ob sie exakt, angenähert, eindeutig oder aus einer periodischen Familie ausgewählt ist. Rahmen des Lernwegs: der veröffentlichte Terminale-Lehrplan, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Text und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Arbeit; weder tatsächliche Vorhersagen noch eine Reproduktion von Aufgabenblättern Dritter werden vorgelegt.

Kapitel 8 - Stammfunktionen und Integrale: eine Aufsummierung messen und eine Näherung prüfen

Historischer Bezug - Cavalieri: über Flächen vor der modernen Integralrechnung nachdenken

Bonaventura Cavalieris Geometria erschien 1635 und stellte seine Methode der Unteilbaren vor. Das Werk bildet einen historischen Bezugspunkt für die Untersuchung von Flächen und Volumina. In unserem Kapitel helfen Zerlegung und Summation beim Verständnis des Integrals, doch moderne Definitionen und Begründungen lassen sich nicht auf diese frühere Methode reduzieren. Der didaktische Bezug besteht im Übergang von einer ganzen Figur zu vergleichbaren Beiträgen und anschließend zu einem kontrollierten Ergebnis. Dieser Bezug schreibt die Erfindung der Integration weder allein Cavalieri zu noch verwechselt er geometrische Anschauung mit einem modernen Beweis.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cavalieri/

1. Eine aufsummierte Größe, kein momentaner Wert

Leistung bezeichnet Energie pro Zeiteinheit; die während einer Dauer aufgenommene Energie hängt vom gesamten Verlauf der Leistung ab. Geschwindigkeit bezeichnet Ortsänderung pro Zeiteinheit; die Ortsänderung hängt vom Geschwindigkeitsverlauf während des Wegs ab. Ein Integral berechnet diese Aufsummierung. Es ersetzt deshalb die Ausgangsfunktion nicht einfach durch einen „Mittelwert“, ohne dessen Definition anzugeben.

Bei einer stetigen nichtnegativen Funktion auf [a; b] kann das Integral über die Fläche unter ihrer Kurve zwischen beiden Randpunkten eingeführt werden. Immer schmalere Rechtecke nähern diese Fläche an. Bei einer Funktion mit beliebigem Vorzeichen erhält das Integral ein Vorzeichen: Beiträge unterhalb der Achse sind negativ. Geometrische Gesamtfläche und Integral können sich dann unterscheiden.

Die Einheit des Integrals ist die Einheit der Funktion, multipliziert mit der Einheit der Variablen. Über Sekunden integrierte Leistung in Watt ergibt Joule; über Sekunden integrierte Geschwindigkeit in m/s ergibt Meter. Sind die Achsen Zahlen ohne Einheiten, sprechen wir bei einer geometrischen Deutung von Flächeneinheiten. Diese Kontrolle verbindet die Rechnung mit der tatsächlich gestellten Frage.

2. Stammfunktionen: eine Familie von Funktionen

Eine Stammfunktion F von f auf einem Intervall I ist eine differenzierbare Funktion mit F' = f auf I. Ist F eine Stammfunktion, gilt dies auch für F + C mit jeder Konstanten C. Umgekehrt unterscheiden sich zwei Stammfunktionen derselben Funktion auf einem Intervall um eine Konstante. Das Wort „Intervall“ ist wichtig: Auf einem Definitionsbereich aus getrennten Teilen können die Konstanten auf jedem Teil verschieden sein.

Für f(x) = 2x ist F(x) = x² eine Stammfunktion. Für f(x) = e^(3x) ist F(x) = e^(3x)/3 geeignet. Für f(x) = cos(4x) gilt F(x) = sin(4x)/4. Prüfen Sie jeden Vorschlag durch Ableiten. Der innere Faktor muss ausgeglichen werden; e^(3x) als Stammfunktion von e^(3x) anzugeben, würde den Faktor 3 in der Ableitung vergessen.

Eine zusätzliche Bedingung bestimmt die Konstante. Ist F' = 2x und F(1) = 5, gilt F(x) = x² + C und 1 + C = 5, also C = 4. Die Anfangsbedingung verwandelt eine Familie in eine bestimmte

Funktion. Dieser Gedanke wird bei Differentialgleichungen erneut verwendet: Die Integration liefert eine Familie, und die Angaben wählen ein Mitglied aus.

3. Der Hauptsatz und die Berechnung mit einer Stammfunktion

Für eine auf einem Intervall mit a und b stetige Funktion f erlaubt jede Stammfunktion F die Berechnung $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Eine zu F addierte Konstante verändert diese Differenz nicht. Der Wert am unteren Rand wird nach der Auswertung der Stammfunktion abgezogen; falsche Klammern können das Ergebnis umkehren.

Die Funktion $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ ist bei erfüllten Stetigkeitsvoraussetzungen eine Stammfunktion von f. Die Variable t unter dem Integralzeichen ist eine Integrationsvariable; hier bezeichnet x die veränderliche obere Grenze. Diese Unterscheidung verhindert die Verwendung desselben Buchstabens in mehreren Rollen, ohne zu wissen, was sich verändert. Das Integral verbindet somit aufsummierte Fläche und Differentiation.

Für $f(x) = 3x^2 - 2$ auf [1; 2] ist $F(x) = x^3 - 2x$ eine Stammfunktion. Das Integral beträgt $(8 - 4) - (1 - 2) = 5$. Die Funktion ist auf diesem Intervall positiv, weshalb ein positives Ergebnis dazu passt. Das Vorzeichen zu prüfen, ist unabhängig von der Berechnung der Klammern und kann vor der abschließenden Antwort einen Fehler aufdecken.

4. Fläche mit Vorzeichen und geometrische Fläche

Es sei f(x) = x − 1 auf [0; 3]. Eine Stammfunktion lautet x²/2 − x. Das Integral beträgt 3/2. Der Bereich zwischen Kurve und Achse hat jedoch einen negativen Teil zwischen 0 und 1 und einen positiven Teil zwischen 1 und 3. Die geometrische Gesamtfläche ist die Summe beider positiven Flächen: 1/2 + 2 = 5/2.

Zur Berechnung dieser Fläche integrieren wir |f| oder zerlegen den Definitionsbereich an Vorzeichenwechseln. Die Formel ∫f liefert die Differenz zwischen positiven und negativen Beiträgen. Ein Integral von null bedeutet daher nicht, dass die Funktion null ist: Beiträge können sich aufheben. Beispielsweise gilt ∫_(−1)^1 x dx = 0, obwohl der Graph zwei Bereiche mit von null verschiedenen Flächen aufweist.

Für die Fläche zwischen zwei Kurven f und g integrieren wir |f − g|. Ist f ≥ g auf dem gesamten Intervall bekannt, lautet die Fläche ∫(f − g). Schnittpunkte können mehrere Teilstücke verlangen. Die „obere“ Kurve anhand eines einzigen Punkts ohne Vorzeichenuntersuchung zu wählen, kann eine negative Fläche oder eine unbeabsichtigte Aufhebung erzeugen.

5. Eigenschaften des Integrals

Linearität liefert ∫(αf + βg) = α∫f + β∫g bei gleichen Integrationsgrenzen und geeigneten Voraussetzungen. Die Intervalladditivität erlaubt die Zerlegung: ∫_a^b f + ∫_b^c f = ∫_a^c f. Werden die Grenzen vertauscht, ändert sich das Vorzeichen; das Integral zwischen gleichen Grenzen ist null. Diese Regeln gliedern eine Rechnung, ohne für jedes Teilstück eine neue Stammfunktion zu verlangen.

Gilt f ≥ 0 auf [a; b] mit a ≤ b, ist das Integral nichtnegativ. Aus f ≤ g folgt ∫f ≤ ∫g. Eine punktweise Ungleichung kann daher eine Aufsummierung eingrenzen. Die Reihenfolge der

Integrationsgrenzen ist wichtig: Bei geänderter Orientierung kehren sich die Vorzeichen um. Die Eigenschaften müssen zusammen mit ihren Konventionen verwendet werden.

Gilt m ≤ f(x) ≤ M auf [a; b], folgt m(b − a) ≤ ∫_a^b f ≤ M(b − a). Diese Eingrenzung ist nicht immer besonders genau, bietet aber eine unmittelbare Kontrolle. Ein berechneter Wert außerhalb der Schranken passt nicht zu den Angaben oder zur Rechnung. Bei einer Funktion zwischen 2 und 5 auf einem Intervall der Länge 3 muss das Integral zwischen 6 und 15 liegen.

6. Eine verkettete Ableitung rückwärts erkennen

Beim Suchen von Stammfunktionen ist das Erkennen der Struktur hilfreich. Ist u differenzierbar, ist e^u eine Stammfunktion von u'e^u. Für u > 0 ist ln(u) eine Stammfunktion von u'/u. Eine Stammfunktion von u'cos(u) lautet sin(u). Der Faktor u' ist entscheidend; die bloße Anwesenheit einer Exponentialfunktion, eines Quotienten oder eines Kosinus genügt nicht.

Für f(x) = 2x/(x² + 1) erkennen wir u = x² + 1, stets positiv, und u' = 2x. Eine Stammfunktion lautet ln(x² + 1). Für g(x) = 6x e^(3x²) lautet eine Stammfunktion e^(3x²). Wäre der Zähler im ersten Beispiel x, wäre ein Faktor 1/2 nötig. Die Kontrolle durch Ableiten liefert den exakten Koeffizienten zurück.

Erfinden Sie keine Stammfunktion, indem Sie Zähler und Nenner eines Quotienten „getrennt integrieren“. Ebenso ist eine Stammfunktion eines Produkts nicht das Produkt zweier Stammfunktionen. Die Ableitungsregeln erklären, warum diese Abkürzungen falsch sind. Passt keine unmittelbar erkennbare Struktur, kann ein anderes Verfahren oder eine Näherung erforderlich sein.

7. Partielle Integration: die Ableitung eines Produkts verwenden

Die Formel (uv)' = u'v + uv' liefert nach Integration ∫_a^b u'v = [uv]_a^b − ∫_a^b uv'. Diese Beziehung der partiellen Integration verwandelt ein Integral in ein anderes. Ihr Nutzen hängt von der Wahl ab: Gesucht werden eine Ableitung, die einen Faktor vereinfacht, und eine zugängliche Stammfunktion des anderen. Keine Wahl ist automatisch bei jedem Produkt wirksam.

Bei ∫_0^1 xe^x dx setzen wir v = x und u' = e^x, also u = e^x und v' = 1. Das Integral lautet [xe^x]_0^1 − ∫_0^1 e^x dx = e − (e − 1) = 1. Eine entsprechende Stammfunktion ist (x − 1)e^x, kontrollierbar durch Ableiten. Das positive Ergebnis passt zum positiven Integranden auf dem Intervall.

Bei ∫_1^e ln(x) dx setzen wir v = ln(x) und u' = 1, also u = x und v' = 1/x. Daraus folgt [xln(x)]_1^e − ∫_1^e 1 dx = e − (e − 1) = 1. Eine Stammfunktion xln(x) ohne den Term −x würde einen Teil ihrer Ableitung vergessen. Das Verfahren wird über die Produktregel verstanden und nicht über eine unbegründete, auswendig gelernte Auswahlregel.

8. Der Mittelwert einer Funktion

Der Mittelwert von f auf [a; b] mit a < b lautet μ = [1/(b − a)]∫_a^b f(x) dx. Er hat dieselbe Einheit wie f. Er entspricht der Höhe eines Rechtecks mit derselben Breite und derselben vorzeichenbehafteten Fläche wie das Integral. Das Mittel einiger abgetasteter Werte ist nicht automatisch dieser Wert; es hängt von der Abtastung und der verwendeten Näherung ab.

Für f(x) = x² auf [0; 2] beträgt das Integral 8/3 und der Mittelwert 4/3. Das Mittel nur der Randwerte, (0 + 4)/2 = 2, ist davon verschieden. Ist f stetig, wird ihr Mittelwert an mindestens einer

Stelle im Intervall angenommen; hier passt x = 2/sqrt(3). Diese Eigenschaft liefert nicht immer eine eindeutige Stelle.

In einem Leistungsmodell P(t) = 3t + 2 auf [0; 4] Sekunden, mit passenden Einheiten der Koeffizienten, beträgt die Energie ∫P dt = 32 J und die mittlere Leistung 8 W. Bei dieser affinen Funktion liefert auch das Mittel aus Anfangs- und Endwert 8 W. Die Gleichheit folgt aus der affinen Struktur und darf nicht auf jede Kurve verallgemeinert werden.

9. Rechtecke und numerische Eingrenzungen

Wir zerlegen [0; 1] für die wachsende Funktion f(x) = x² in vier Intervalle der Breite 1/4. Rechtecke mit Werten am linken Rand unterschätzen die Fläche; Rechtecke mit Werten am rechten Rand überschätzen sie. Die linke Summe beträgt (1/4)[0² + (1/4)² + (1/2)² + (3/4)²] = 0,21875. Die rechte Summe beträgt 0,46875. Das exakte Integral 1/3 liegt dazwischen.

Eine größere Zahl von Unterteilungen verengt diese Eingrenzungen bei einer stetigen Funktion in diesem Rahmen. Ein numerisches Verfahren muss Zahl und Breite der Intervalle sowie die Wahl der Stellen angeben. Eine Ergebnisliste ohne Verfahren erlaubt keine Beurteilung der Genauigkeit. Ist die Funktion nicht monoton, garantiert die alleinige Wahl linker oder rechter Stellen keine Schranke; Extremwerte auf jedem Teilstück müssen untersucht oder andere Argumente verwendet werden.

Das Trapezverfahren verwendet die Verbindungsstrecken zwischen Randwerten. In diesem konvexen Beispiel überschätzt es die Fläche und liefert bei vier Teilstücken 0,34375. Das Mittelpunktverfahren liefert 0,328125, hier eine Unterschätzung. Die Lage der Sehnen und die Konvexität erklären die Richtung dieser Abweichungen. Ohne diese Information liefern die Verfahren Näherungen, aber nicht notwendigerweise gesicherte Schranken.

10. Eine Folge von Integralen und eine Rekursionsvorschrift

Wir definieren I_n = ∫_0^1 x^n e^x dx für n ≥ 0. Die Integranden sind im Inneren positiv, also gilt I_n > 0. Wegen 0 ≤ x ≤ 1 gilt x^(n+1) ≤ x^n, also I_(n+1) ≤ I_n. Die Folge fällt monoton und ist nach unten durch null beschränkt; sie konvergiert. Zur Bestimmung des Grenzwerts verwenden wir e^x ≤ e: I_n ≤ e∫_0^1 x^n dx = e/(n + 1), was gegen null strebt. Die Schranken liefern daher I_n → 0.

Partielle Integration für n ≥ 1 ergibt I_n = [x^n e^x]_0^1 − n∫_0^1 x^(n−1)e^x dx = e − nI_(n−1). Das erste Glied lautet I_0 = e − 1; daraus erhalten wir wieder I_1 = 1. Der Fall n = 0 muss gesondert behandelt werden, weil der Randausdruck an null und die Potenz n − 1 ihren Status ändern.

Diese Beziehung ist exakt, kann aber für große n numerisch schwierig sein, weil nahe beieinanderliegende Größen subtrahiert und manche Rundungsfehler verstärkt werden. Eine richtige Rekursionsformel ist nicht automatisch der beste Gleitkommaalgorithmus. Die theoretischen Schranken bieten hier eine wertvolle Kontrolle: Ein negatives Ergebnis wäre für diese positiven Integrale unmöglich.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Stammfunktion und Randwert. Berechnen Sie ∫_0^2 (4x + 1) dx. **Lösung:** Eine Stammfunktion ist 2x² + x, also beträgt das Integral 10. Die Funktion ist auf diesem Intervall positiv; ein negatives Ergebnis würde auf einen Fehler in Vorzeichen oder Integrationsgrenzen hinweisen.

B - Fläche zwischen Kurven. Vergleichen Sie x und x² auf [0; 1] und berechnen Sie anschließend die Fläche zwischen ihren Graphen. **Lösung:** x − x² = x(1 − x) ≥ 0. Die Fläche beträgt ∫_0^1(x − x²) dx

= 1/2 − 1/3 = 1/6. Die Reihenfolge der Funktionen wird vor der Integration bestimmt.

C - Produkt. Berechnen Sie ∫_0^1 xe^(2x) dx. **Lösung:** Partielle Integration liefert [xe^(2x)/2]_0^1 − (1/2)∫_0^1 e^(2x) dx = e²/2 − (e² − 1)/4 = (e² + 1)/4. Der Faktor 1/2 tritt zweimal auf und muss erhalten bleiben.

D - Ortsänderung. Eine Geschwindigkeit lautet v(t) = 2 − t auf [0; 4]. **Lösung:** Ihr Integral beträgt [2t − t²/2]_0^4 = 0. Die Weglänge ist nicht null: Sie beträgt 2 + 2 = 4 in der Längeneinheit, wenn die Phasen vor und nach t = 2 getrennt werden. Das Integral der vorzeichenbehafteten Geschwindigkeit liefert die Ortsänderung.

E - Schranken. Eine Funktion erfüllt 1 ≤ f ≤ 3 auf [2; 5]. **Lösung:** 3 ≤ ∫_2^5 f ≤ 9, und ihr Mittelwert liegt zwischen 1 und 3. Diese Eingrenzungen bestimmen keinen eindeutigen Wert; sie begründen, was allein mit den gegebenen Schranken vereinbar ist.

12. Wiederholung und Quellen

Wiederholen Sie ein Integral anhand seiner Bedeutung, Einheiten, seines Vorzeichens und seines Berechnungsverfahrens. Prüfen Sie eine Stammfunktion durch Ableiten. Untersuchen Sie für eine geometrische Fläche die Vorzeichenwechsel; nennen Sie bei einer Näherung die Voraussetzungen, unter denen sie eine Schranke oder nur eine Schätzung ist. Behalten Sie Konstanten und Faktoren verketteter Funktionen bis zur abschließenden Kontrolle bei.

Der veröffentlichte offizielle Rahmen der Terminale umfasst Stammfunktionen, Integrale, Mittelwerte und partielle Integration: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Beweise, Situationen und Aufgaben dieses Kapitels sind eigenständige LFDP-Texte. Weder Texte aus einem Lehrplandokument oder Lehrbuch noch Prüfungsaufgaben Dritter werden wiedergegeben.

Kapitel 9 - Differentialgleichungen: eine Veränderung mit ihrer Änderungsrate verbinden

Historischer Bezug - Euler: Funktionen aus Beziehungen bestimmen

Euler veröffentlichte zwischen 1768 und 1770 seine dreibändige Abhandlung zur Integralrechnung; sie untersucht auch Differentialgleichungen. Dieser Bezug erinnert daran, dass die Unbekannte eine ganze Funktion und nicht nur eine einzelne Zahl sein kann. In diesem Kapitel wird eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung durch eine Anfangsbedingung ergänzt und anschließend durch Deutung und numerische Näherung untersucht. Das institutionelle Archiv datiert den ersten Band auf 1768; die dort bereitgestellte Datei ist eine 1824 veröffentlichte dritte Auflage. Diese Unterscheidung ist bei der Einsicht in das historische Dokument beizubehalten.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor : https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler/ ; University of the Pacific - Euler Archive : https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/342/

1. Eine Gleichung mit einer Funktion als Unbekannter

Eine Differentialgleichung verbindet eine unbekannte Funktion mit einer oder mehreren ihrer Ableitungen. y' = 2y zu lösen, bedeutet nicht, eine einzelne Zahl y zu finden: Gesucht sind sämtliche differenzierbaren Funktionen, die diese Beziehung auf einem Intervall erfüllen. Eine Anfangsbedingung wie y(0) = 3 wählt anschließend eine Lösung aus einer Familie aus. Die Unterscheidung zwischen Veränderungsbeziehung und Anfangszustand ist ebenso wichtig wie bei Folgen.

Die Variablen müssen benannt werden. Steht t für die Zeit, kann y(t) eine Temperatur, eine fiktive Konzentration oder eine abstrakte Größe darstellen. Der Koeffizient vor y in y' = ay hat die Einheit einer inversen Zeit, wenn y dieselbe Einheit behält. Ein Term b in y' = ay + b hat die Einheit von y pro Zeiteinheit. Eine Gleichung kann algebraisch richtig und bei unpassenden Einheiten physikalisch unstimmig sein.

Das Kapitel behandelt vor allem lineare Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Vertiefungen zeigen, warum dieses Modell nicht jede Art von Veränderung umfasst. Die Situationen wurden für das Lernen entwickelt; ohne Prüfung der Annahmen und Parameter sagen sie weder eine Rendite noch eine gesundheitliche Entwicklung oder ein reales Phänomen voraus.

2. y' = ay lösen und die gesamte Familie begründen

Die Funktion y(t) = Ce^(at) erfüllt für jede Konstante C die Beziehung y' = aCe^(at) = ay. Um zu zeigen, dass alle Lösungen diese Form haben, betrachten wir eine Lösung y und definieren z(t) = y(t)e^(−at). Nach der Produktregel gilt z' = y'e^(−at) − aye^(−at) = 0. Auf einem Intervall ist z daher konstant, und y = Ce^(at). Dieser Beweis begründet die gesamte Familie und nicht nur einige Lösungsbeispiele.

Gilt y(t_0) = y_0, folgt C = y_0e^(−at_0) und somit y(t) = y_0e^[a(t − t_0)]. Die Form mit t − t_0 erhält den Ursprung der Anfangsbedingung deutlich. Für a = 0 ergeben sich wieder konstante Lösungen. Für y_0 = 0 ist die Lösung unabhängig von a identisch null. Das Vorzeichen von y_0 bleibt erhalten, weil die Exponentialfunktion positiv ist.

Für a > 0 und y_0 > 0 wächst die Funktion und divergiert im Modell langfristig. Für a < 0 und y_0 > 0 fällt sie gegen null. Ein negatives a bedeutet eine zur aktuellen Größe proportionale relative

Abnahme, keine gleichbleibende Abnahme je Zeiteinheit. Letztere würde durch y' = b mit konstantem b beschrieben.

3. Ein konstanter Term und ein Gleichgewichtswert

Für y' = ay + b mit a ≠ 0 suchen wir eine konstante Lösung L. Sie muss 0 = aL + b erfüllen, also L = −b/a. Die Substitution z = y − L ergibt z' = az. Die Lösungen lauten daher y(t) = L + Ce^(at). Der Variablenwechsel misst den Abstand vom Gleichgewicht und verwandelt die Gleichung in einen bereits gelösten Fall.

Mit y(t_0) = y_0 wird die Lösung zu y(t) = L + (y_0 − L)e^[a(t − t_0)]. Prüfen Sie zuerst die Anfangsbedingung und anschließend die Gleichung durch Ableiten. Bei a < 0 strebt der Abstand zu L gegen null. Je nach Vorzeichen von y_0 − L kann eine Lösung gegen L wachsen oder gegen L fallen. Dasselbe Modell legt die Veränderungsrichtung nicht unabhängig vom Anfangszustand fest.

Bei a > 0 wächst ein anfänglich von null verschiedener Abstand im Betrag; die konstante Lösung y = L existiert trotzdem weiterhin. Es wäre deshalb falsch, bei a > 0 Divergenz aller Lösungen zu behaupten. Für a = 0 ist die vorherige Umformung nicht zulässig; die Gleichung lautet y' = b und besitzt die Lösungen y(t) = bt + C. Die gesonderte Behandlung dieses Falls vermeidet eine Division durch null.

4. Eine Gleichung mit einer Bedingung zu einem anderen Zeitpunkt

Lösen wir y' + 3y = 9 mit y(1) = 4. Die Gleichung ist äquivalent zu y' = −3y + 9, also L = 3 und y(t) = 3 + Ce^(−3t). Die Bedingung ergibt 4 = 3 + Ce^−3 und somit C = e³. Eine deutlichere Darstellung lautet y(t) = 3 + e^[−3(t − 1)]. Bei t = 1 ist der Exponentialfaktor eins und der Wert tatsächlich vier.

Gleichung und Bedingung verlangen nicht unbedingt einen Ursprung bei t = 0. Ein häufiger Fehler besteht darin, C = 4 zu setzen, weil der Fall y(0) = y_0 für y' = ay auswendig gelernt wurde. Hier verändern der Gleichgewichtsterm und der Anfangszeitpunkt die Konstante. Die Kontrolle an der angegebenen Stelle ist kurz und erkennt diesen Fehler sofort.

Die Lösung bleibt oberhalb von 3 und fällt für t ≥ 1. Ihr Grenzwert beträgt 3. Der Grenzwert folgt aus dem Vorzeichen des Koeffizienten im Exponenten und nicht bloß daraus, dass die Gleichung eine konstante Lösung besitzt. Bei einer Gleichung mit a > 0 wäre der konstante Wert gegenüber einer anfänglichen Abweichung gewöhnlich instabil. Die Existenz eines Gleichgewichts und seine anziehende Wirkung sind verschiedene Eigenschaften.

5. Abkühlung: das Modell aus einer Bilanz aufstellen

Ein fiktiver Gegenstand mit Wärmekapazität C tauscht Energie mit einer auf T_ext gehaltenen Umgebung aus. Ein Gesetz für die aufgenommene Leistung −H(T − T_ext) mit konstantem H > 0 führt zu C T' = −H(T − T_ext). Die Gleichung wird als T' = −(1/τ)(T − T_ext) geschrieben, wobei τ = C/H eine charakteristische Zeit ist. Bei einem an null vorgegebenen Anfangszustand lautet die Lösung T = T_ext + (T_0 − T_ext)e^(−t/τ).

Für T_0 = 70 °C, T_ext = 10 °C und τ = 4 min ergibt sich T(t) = 10 + 60e^(−t/4), mit t in Minuten. Das Modell nähert sich 10 °C, nicht null. Um höchstens 25 °C zu erreichen, muss der Unterschied höchstens 15 werden: e^(−t/4) ≤ 1/4, also t ≥ 4ln(4) ≈ 5,55 min. Der Logarithmus wird auf ein dimensionsloses Verhältnis angewandt.

Diese Rechnung liefert keine Handlungsanweisung für den Kontakt mit einem heißen Gegenstand. Die tatsächliche Umgebung kann sich verändern, die Temperatur des Gegenstands kann

ungleichmäßig sein, und der Koeffizient H kann von den Bedingungen abhängen. Das Modell ist nützlich, wenn diese Näherungen für die Frage vertretbar sind. Die Gleichung wird nicht dadurch zu einer physikalischen Bestätigung, dass ihre Lösung mathematisch exakt ist.

6. Zu- und Abfluss sowie Erhaltung in einem fiktiven Behälter

Ein idealer Behälter mit konstantem Volumen V erhält und entlässt denselben Volumenstrom Q. Wir nehmen eine augenblicklich homogene Mischung und eine konstante Zuflusskonzentration c_in an. Ist M = Vc die vorhandene Stoffmenge, lautet die Bilanz M' = Qc_in − Qc. Bei konstantem V folgt c' = (Q/V)(c_in − c). Die Beziehung entsteht aus beiden Strömen, nicht aus einer Vorliebe für Exponentialfunktionen.

Die Gleichgewichtskonzentration beträgt c_in und die charakteristische Zeit V/Q. Für V = 100 Liter und Q = 5 Liter pro Minute beträgt diese Zeit 20 min. Ist die Anfangskonzentration 3 g/L und die Zuflusskonzentration 1 g/L, lautet die Lösung c(t) = 1 + 2e^(−t/20). Nach 20 min beträgt sie ungefähr 1,736 g/L. Das Gesamtvolumen bleibt in diesem Modell konstant, die Stoffmenge verändert sich jedoch.

Enthält der Zufluss den Stoff nicht, gilt c_in = 0, und c fällt exponentiell. Bei c_0 = 5 g/L beträgt die Anfangsmenge in 100 Litern 500 g; nach einer Zeitkonstante sind es ungefähr 184 g. Dies sind Aufgabenwerte, keine Dosierungen, Behandlungen oder Empfehlungen zum Einsatz einer Flüssigkeit. Eine inhomogene Mischung oder ein variables Volumen würde eine andere Gleichung verlangen.

7. Lineare, exponentielle und sättigende Modelle

Konstantes Wachstum y' = b liefert eine affine Entwicklung. Proportionales Wachstum y' = ry liefert eine Exponentialfunktion. Beide können auf einem kurzen Abschnitt nahe beieinanderliegen und langfristig sehr verschieden sein. Die Wahl verlangt Annahmen und Beobachtungen. Zwei Punkte anzupassen, bestimmt nicht immer, welche Regel außerhalb dieser Punkte relevant bleibt.

Als Vertiefung modelliert eine nichtlineare Gleichung y' = ry(1 − y/K) mit r > 0 und K > 0 ein vermindertes Wachstum beim Annähern an eine Kapazität K. Für 0 < y_0 < K lautet eine Lösung y(t) = K/[1 + A e^(−rt)] mit A = K/y_0 − 1. Sie lässt sich durch Ableiten prüfen. Die konstanten Lösungen null und K sind gesondert zu untersuchen; die Formel für A ist für y_0 = 0 undefiniert.

Dieses zusätzliche Beispiel ist kein allgemeingültiges Bevölkerungsmodell. Der Parameter K kann in einer realen Situation künstlich oder veränderlich sein, und andere Effekte können überwiegen. Das Beispiel zeigt, dass eine unbegrenzte Exponentialfunktion nicht die einzige mögliche mathematische Struktur ist. Konkurrierende Modelle werden nach ihren Annahmen und Vorhersagen beurteilt und nicht nach einem beruhigenderen Aussehen der Kurve.

8. Das Euler-Verfahren: eine diskrete Näherung

Für y' = f(t,y) verwendet das explizite Euler-Verfahren y_(n+1) = y_n + h f(t_n,y_n) mit t_(n+1) = t_n + h. Es ersetzt die Entwicklung auf einem kleinen Intervall durch die am Anfang angegebene lokale Veränderung. Die Schrittweite h muss eine Zeiteinheit haben. Die berechneten Werte nähern die Lösung an; im Allgemeinen sind sie nicht die exakten Werte zu denselben Zeitpunkten.

Für y' = −ky mit k > 0 liefert Euler y_(n+1) = (1 − kh)y_n. Über einen Schritt multipliziert die exakte Lösung y mit dem stets positiven e^(−kh). Für 0 < kh ≤ 1 bleibt der Euler-Faktor nichtnegativ und erzeugt aus einem positiven Anfangszustand eine Abnahme. Für 1 < kh < 2 wechseln die Werte das Vorzeichen und nehmen im Betrag ab. Für kh > 2 können sie im Betrag wachsen, obwohl die stetige Lösung abnimmt.

Bei k = 1 und h = 3 in passenden Einheiten beträgt der numerische Faktor −2: Das Verfahren divergiert für y_0 ≠ 0. Dieses Scheitern widerlegt nicht die exakte Lösung e^−t, sondern zeigt eine ungeeignete Schrittweite und eine Grenze des Algorithmus. Eine kleinere Schrittweite kann eine Näherung verbessern, doch Regularität, Dauer und aufsummierte Fehler müssen weiterhin untersucht werden. Ein Programm, das ohne Computerfehler läuft, ist nicht notwendigerweise eine mathematisch verlässliche Simulation.

9. Einen Parameter bestimmen und unabhängig kontrollieren

Ist das Gleichgewicht L bekannt und sollen Beobachtungen y(t) = L + Ce^(at) folgen, erlauben zwei Werte mit von null verschiedenen, gleichgerichteten Abständen zu L eine Schätzung von a durch ln[(y(t_2) − L)/(y(t_1) − L)]/(t_2 − t_1). Ein positives Verhältnis und zwei verschiedene Zeitpunkte sind erforderlich. Der geschätzte Koeffizient hängt vom angegebenen Modell ab.

Für fiktive Angaben L = 2, y(0) = 10 und y(4) = 6 beträgt das Verhältnis der Abstände 4/8 = 1/2, also a = −ln(2)/4. Das Modell sagt dann y(8) = 4 voraus. Eine unabhängige Messung zu diesem Zeitpunkt könnte die Vorhersage prüfen. Die beiden zur Anpassung verwendeten Werte wiederzuerhalten, ist keine unabhängige Prüfung: Es kontrolliert die Konstruktion.

Ist auch L unbekannt, bestimmen zwei Beobachtungen nicht notwendigerweise die drei Parameter L, C und a. Unsicherheiten und der Beobachtungsbereich können eine Schätzung ebenfalls empfindlich machen. Eine Differentialgleichung zu lösen, ihre Parameter anzupassen und das Modell zu prüfen, sind drei getrennte Schritte. Eine ansprechend berechnete Kurve ersetzt keinen davon.

10. Ein Einblick in die zweite Ordnung

Eine Gleichung y'' + ω²y = 0 mit ω > 0 tritt bei einem idealen Oszillator auf. Die Funktionen A cos(ωt) + B sin(ωt) erfüllen sie, wie zweimaliges Ableiten zeigt. Mit y(0) = y_0 und y'(0) = v_0 erhalten wir A = y_0 und B = v_0/ω. Zur Bestimmung dieser beiden Konstanten werden zwei Bedingungen benötigt. Dieses zusätzliche Beispiel verdeutlicht die Verbindung zwischen Trigonometrie und dynamischer Veränderung.

Die Periode beträgt 2π/ω. Das Modell enthält weder Dissipation noch eine antreibende Kraft; eine reale Schwingung kann daher weitere Terme verlangen. Lösen Sie diese Gleichung nicht wie y' = ay: Ordnung und Art der Beziehung unterscheiden sich. Das Erkennen der Gleichung geht der Wahl des Verfahrens voraus.

Der Hauptteil des Kapitels konzentriert sich weiterhin auf lineare Gleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Der Oszillator und das sättigende Wachstum sind ausdrücklich unterschiedene Erweiterungen, die dem Verständnis der Grenzen einer Modellfamilie dienen. Sie werden nicht als Ankündigungen von Themen oder Anforderungen einer Prüfungssitzung dargestellt.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen

A - Vollständige Familie. Lösen Sie y' = −2y und erfüllen Sie y(0) = 5. **Lösung:** Die Lösungen lauten Ce^(−2t); die Bedingung ergibt C = 5. Die Lösung ist positiv und fällt gegen null. Ableitung und Anfangswert zu prüfen, kontrolliert die erhaltene Funktion; der Familienbeweis garantiert dagegen, dass in diesem Rahmen keine weitere Lösung vergessen wurde.

B - Gleichgewicht. y' = 2y − 6, y(0) = 4. **Lösung:** L = 3 und y(t) = 3 + e^(2t). Das Gleichgewicht existiert, doch diese Lösung entfernt sich davon. Bei y(0) = 3 wäre sie konstant; bei y(0) = 2 wäre sie 3 − e^(2t) und könnte negativ werden. Müsste y eine nichtnegative Größe darstellen, würde diese spätere Phase eine Grenze des physikalischen Modells anzeigen.

C - Konstanter Term. y' = −4 und y(0) = 7. **Lösung:** y(t) = 7 − 4t. Dies ist keine Exponentialfunktion. Der Wert wird bei t = 7/4 null. Ein physikalischer Definitionsbereich mit der Forderung y ≥ 0 müsste jenseits dieser Schwelle enden oder geändert werden.

D - Vorgeschlagene Lösung. Erfüllt die Funktion y = e^(2t) die Gleichung y' = 2y + 1? **Lösung:** Ihre Ableitung beträgt 2e^(2t), die rechte Seite dagegen 2e^(2t) + 1. Die konstante Differenz zeigt unabhängig von der Anfangsbedingung, dass der Vorschlag nicht passt.

E - Numerischer Schritt. Berechnen Sie für y' = −y, y_0 = 1 und h = 0,5 den ersten Euler-Schritt und vergleichen Sie ihn mit dem exakten Wert. **Lösung:** Euler liefert 0,5; die exakte Lösung liefert e^−0,5 ≈ 0,6065. Der Unterschied beträgt ungefähr 0,1065. Der numerische Schritt beschreibt eine Näherung, keine andere exakte Lösung derselben Gleichung.

12. Wiederholung und Quellen

Bestimmen Sie zum Wiederholen die Familie, verwenden Sie die Anfangsbedingung und prüfen Sie anschließend durch Ableiten. Untersuchen Sie Gleichgewicht, Vorzeichen und Grenzwert, ohne sie allein aus der Bezeichnung der Gleichung schematisch zu folgern. Geben Sie bei einem Modell Austauschprozesse und Einheiten an. Unterscheiden Sie bei einer Simulation exakte Lösung und Näherung und kontrollieren Sie eine unabhängige Invariante oder Schranke.

Veröffentlichter offizieller Rahmen der Terminale: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm und Anhang https://cache.media.education.gouv.fr/file/SPE8_MENJ_25_7_2019/90/7/spe246_annexe_1158907.pdf, eingesehen am 11. Oktober 2026. Ausführungen, Beispiele und Aufgaben sind eigenständige LFDP-Texte. Die Abkühlungs- und Behältermodelle dienen dem Lernen und liefern weder Handlungsanweisung noch Diagnose, Dosierung oder Vorhersage einer realen Situation.

Kapitel 10 - Abzählen, Wahrscheinlichkeit und Binomialverteilung

Historischer Bezug - Pascal: eine Anordnung macht eine Struktur sichtbar

Die BnF verzeichnet eine Veröffentlichung von Blaise Pascals Traité du triangle arithmétique aus dem Jahr 1665, nach seinem Tod. Dieser Bezug begleitet unsere Betrachtung der Binomialkoeffizienten: Eine Zahlenanordnung kann helfen, eine Beziehung zu erkennen; anschließend erklärt ein Beweis, warum sie gilt. In diesem Kapitel trennen wir die Konstruktion des Dreiecks, das Abzählen und wahrscheinlichkeitstheoretische Anwendungen. Das Dreieck mit Pascals Namen zu verbinden, behauptet nicht, er habe diese Anordnung als Erster gekannt; es bezeichnet ein bestimmtes historisches Werk und keinen einzigen Ursprung sämtlicher Gedanken des Kapitels.

Historische Quelle: Bibliothèque nationale de France - Catalogue collectif de France : https://ccfr.bnf.fr/portailccfr/ark:/16871/00114268519

1. Ein Wahrscheinlichkeitsmodell muss mit seinen Ergebnissen beginnen

Eine Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreibt ein Modell eines Versuchs, nicht Unsicherheit im Allgemeinen. Bestimmen Sie die Ergebnismenge möglicher Ausgänge, die Ereignisse und eine Regel zur Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten. In einer endlichen Ergebnismenge sind die elementaren Wahrscheinlichkeiten nichtnegativ und ergeben zusammen eins. Ein Ereignis ist eine Menge von Ergebnissen; seine Wahrscheinlichkeit ist die Summe der ihnen zugeordneten Wahrscheinlichkeiten.

Das Wort „zufällig“ garantiert keine gleichen Wahrscheinlichkeiten. Eine Münze kann verzerrt sein; eine Ziehung hängt von ihrem Mechanismus ab; eine Stichprobe kann verzerrt ausgewählt werden. Die Formel „günstige Fälle geteilt durch mögliche Fälle“ ist begründet, wenn die gezählten Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind. Sie wird irreführend, wenn Kategorien gezählt werden, die unterschiedlich viele Ergebnisse zusammenfassen.

Bei zwei Würfen eines fairen Würfels sind die sechsunddreißig geordneten Paare gleich wahrscheinlich. Die möglichen Summen reichen von zwei bis zwölf, doch diese elf Werte sind nicht gleich wahrscheinlich: Nur ein Paar ergibt zwei, während sechs Paare sieben ergeben. Eine veränderte Darstellung eines Versuchs erhält daher nicht automatisch eine Gleichverteilung auf den neuen Kategorien.

Theoretische Wahrscheinlichkeit muss von beobachteter relativer Häufigkeit unterschieden werden. Eine relative Häufigkeit ist die Anzahl des Auftretens, geteilt durch die Anzahl durchgeführter Versuche. Sie ist ein beobachteter Wert, der sich von einer Reihe zur nächsten verändern kann. Eine Wahrscheinlichkeit ist ein Modellparameter. Ihre Beziehung wird unter Wiederholungsannahmen begründet und nicht durch unmittelbare Gleichsetzung.

2. Ohne Wiederholung oder Doppelzählung abzählen

Bietet eine erste Entscheidung a Möglichkeiten und eine zweite für jede davon b Möglichkeiten, ergeben sich a b Auswahlpaare. Dieses Prinzip setzt voraus, dass die zweite Stufe tatsächlich für jede erste Entscheidung b Möglichkeiten anbietet. Verändert sich diese Anzahl, müssen die entsprechenden Beiträge addiert werden. Ein Baumdiagramm zeigt diese Unterscheidung, statt schematisch ein Produkt anzuwenden.

Für einen Code aus vier Zeichen mit zehn möglichen Wahlen an jeder Position und erlaubter Wiederholung ergeben sich 10^4 Codes. Müssen die Zeichen verschieden sein, lauten die aufeinanderfolgenden Auswahlzahlen zehn, neun, acht und sieben: Es ergeben sich 5 040 Codes. Eine geänderte Bedingung verändert die Anzahl, obwohl die Länge des Codes gleich bleibt.

Bei einem Code oder einer Rangfolge ist die Reihenfolge wichtig. Drei Personen aus fünf für drei aufeinanderfolgende Positionen auszuwählen, ergibt $5 \times 4 \times 3 = 60$ Möglichkeiten. Eine Dreiergruppe aus denselben fünf ohne verschiedene Rollen auszuwählen, ergibt nur zehn Gruppen. Jede Gruppe wurde unter den geordneten Listen $3! = 6$-mal gezählt, also $60/6 = 10$.

Für n verschiedene Objekte beträgt die Zahl der Permutationen n!. Wir definieren $0! = 1$, eine mit mehreren Identitäten vereinbare Konvention. Die Anzahl der Teilmengen mit k aus n ausgewählten Elementen ist der Binomialkoeffizient:

$C(n,k) = n! / [k! (n - k)!]$, für $0 \le k \le n$.

Die Formel drückt genau die Entfernung der Reihenfolge aus. Außerdem gilt $C(n,k) = C(n,n - k)$: Die Auswahl der behaltenen Elemente entspricht der Auswahl ihres Komplements. Diese Symmetrie bietet eine Kontrolle und vereinfacht manche Rechnungen.

Für $n \ge 2$ und $1 \le k \le n - 1$ wird die Pascalsche Beziehung $C(n,k) = C(n - 1,k - 1) + C(n - 1,k)$ bewiesen, indem Gruppen mit einem festgelegten Objekt von Gruppen ohne dieses Objekt getrennt werden. Der Beweis gibt beiden Termen eine Bedeutung; er ist nützlicher als eine ohne Deutung gelernte Fakultätenidentität.

3. Vereinigung, Schnitt und Komplement

Das Komplement von A, geschrieben als nicht A oder A^c, enthält jedes Ergebnis, das nicht zu A gehört. Seine Wahrscheinlichkeit beträgt $1 - P(A)$. Diese Beziehung ist besonders wirksam für „mindestens eines“, wenn zunächst „keines“ berechnet wird und dieses Ereignis eine einfachere Beschreibung hat.

Der Schnitt $A \cap B$ bedeutet, dass beide Ereignisse eintreten. Die Vereinigung $A \cup B$ bedeutet, dass mindestens eines eintritt, möglicherweise beide. Die allgemeine Formel lautet $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Die Subtraktion entfernt die Doppelzählung des Schnitts. Sind die Ereignisse unvereinbar, ist ihr Schnitt leer und dieser Beitrag null.

Unvereinbarkeit und Unabhängigkeit sind verschiedene Begriffe. Zwei unvereinbare Ereignisse mit streng positiven Wahrscheinlichkeiten sind nicht unabhängig: Das Eintreten des einen schließt das andere aus. Umgekehrt können unabhängige Ereignisse zusammen eintreten. Ein gerades Würfelergebnis und ein Würfelergebnis von mindestens vier können gemeinsame Ergebnisse haben, ohne automatisch unabhängig zu sein; ihre Beziehung wird im Modell berechnet.

Eine Zeichnung zweier Mengen kann die Operationen erklären helfen, liefert aber keine verlässliche Messung ihrer Wahrscheinlichkeiten, sofern die Flächen nicht gezielt dafür konstruiert wurden. Zeichnungen ordnen den Gedankengang; Daten und Verteilung liefern die Rechnung.

4. Bedingte Wahrscheinlichkeit: die Bezugspopulation ändern

Bei streng positivem P(A) ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung A definiert als $P(B|A) = P(A \cap B)/P(A)$. Der Nenner entspricht dem Ereignis, das zum Bezug wird. Wir können $P(A \cap B) = P(A)\,P(B|A)$ schreiben. Diese Beziehung berechnet einen Ast eines Baumdiagramms, ohne Unabhängigkeit vorauszusetzen.

In einer fiktiven Population von Chargen stammen 40 % aus Werkstatt A und 60 % aus Werkstatt B. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Charge ein festgelegtes Kriterium erfüllt, beträgt innerhalb von A 90 % und innerhalb von B 60 %. Das Ereignis R bezeichnet die Erfüllung des Kriteriums. Die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten lauten $P(A \cap R) = 0{,}40 \times 0{,}90 = 0{,}36$ und $P(B \cap R) = 0{,}60 \times 0{,}60 = 0{,}36$.

Weil die beiden Werkstätten eine Zerlegung der Population bilden, gilt $P(R) = 0{,}72$. Unter den Chargen, die das Kriterium erfüllen, beträgt die Wahrscheinlichkeit der Herkunft aus A $0{,}36/0{,}72 = 0{,}50$. Sie ist weder 0,40 noch 0,90. Die Rechnung hat die Bezugspopulation geändert: Wir betrachten nicht mehr jede Charge, sondern nur diejenigen mit erfülltem Kriterium.

Dieses Beispiel zeigt, warum $P(R|A)$ und $P(A|R)$ nicht austauschbar sind. Das erste beschreibt Ergebnisse innerhalb der Werkstatt, das zweite die Herkunft unter den ausgewählten Ergebnissen. Dieselben Ereignisse treten in beiden Ausdrücken auf, doch ihre Nenner unterscheiden sich.

Eine Kreuztabelle bietet eine andere Darstellung. Unter tausend fiktiven Chargen mit den Proportionen des Modells stammen 400 aus A und 600 aus B; jeweils 360 erfüllen das Kriterium. Von den 720 ausgewählten Chargen stammt die Hälfte aus A. Die Tabelle

kann das Bedingen greifbarer machen als Symbole, ohne die Definition zu ersetzen.

5. Totale Wahrscheinlichkeit und die Wirkung von Basisraten

Eine Zerlegung ist eine Familie unvereinbarer Ereignisse, die die Ergebnismenge abdecken. Für eine Zerlegung A_1, …, A_m mit positiven Wahrscheinlichkeiten ist P(B) die Summe der P(A_i) P(B|A_i). Beiträge verschiedener Gruppen werden addiert. Die Formel verlangt keine Unabhängigkeit von B und den Gruppen.

Ein fiktives Prüfgerät meldet 95 % der fehlerhaften Teile und meldet außerdem 5 % der nichtfehlerhaften Teile. Das Modell nimmt an, dass 1 % der Teile fehlerhaft sind. Unter zehntausend theoretischen Teilen gibt es hundert fehlerhafte, von denen fünfundneunzig gemeldet werden, und neuntausendneunhundert nichtfehlerhafte, von denen vierhundertfünfundneunzig gemeldet werden. Insgesamt werden somit fünfhundertneunzig Teile gemeldet.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gemeldetes Teil tatsächlich fehlerhaft ist, beträgt 95/590, ungefähr 16,1 %. Ein hoher Anteil erkannter fehlerhafter Teile bedeutet daher nicht, dass jede Meldung verlässlich ist. Die Basisrate der Fehler und die Fehlmeldungen tragen zum Ergebnis bei. Das Beispiel betrifft keine medizinische Entscheidung: Es veranschaulicht lediglich bedingtes Denken in einer fiktiven Fertigung.

Dasselbe Gerät würde bei einer Population mit wesentlich häufigeren Fehlern nach einer Meldung eine andere bedingte Wahrscheinlichkeit liefern. Das Ergebnis als isolierte Eigenschaft des Geräts darzustellen, wäre daher falsch. Diese Vorsicht wird wesentlich, wenn ein Prozentsatz ohne Beschreibung der Ausgangspopulation mitgeteilt wird.

6. Unabhängigkeit: eine Annahme, die ein Produkt erlaubt

Zwei Ereignisse A und B sind unabhängig, wenn $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ gilt. Bei positivem $P(A)$ ist diese Bedingung zu $P(B|A) = P(B)$ äquivalent. Die Information, dass A eingetreten ist, verändert dann im Modell die Wahrscheinlichkeit von B nicht. Unabhängigkeit beschreibt eine Wahrscheinlichkeitsstruktur und nicht fehlende räumliche Nähe oder ein allgemeines Fehlen gemeinsamer Ursachen.

Zwei aufeinanderfolgende Münzwürfe werden häufig als unabhängig mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit modelliert. Auch Ziehungen mit Zurücklegen können unabhängig sein, wenn Mischung und Mechanismus passen. Ziehungen ohne Zurücklegen aus einer kleinen Urne sind es gewöhnlich nicht: Nach der ersten Ziehung verändert sich die verbleibende Zusammensetzung.

Eine Urne enthält drei rote und zwei blaue Kugeln. Ohne Zurücklegen gilt $P(\text{rot bei der ersten Ziehung}) = 3/5$, und die Wahrscheinlichkeit für Rot bei der zweiten unter der Bedingung Rot bei der ersten beträgt $2/4$. Die Wahrscheinlichkeit zweier roter Kugeln ist daher $3/10$. Mit Zurücklegen und modellgerechtem Mischen wäre sie $(3/5)^2 = 9/25$. Dies sind unterschiedliche Versuche und keine alternativen Rechnungen für denselben Ablauf.

Bei mehreren Versuchen verwenden wir die zur betrachteten Reihe passende gemeinsame Unabhängigkeit. Paarweise Beziehungen zu prüfen, genügt im Allgemeinen nicht, um die vollständige Unabhängigkeitsstruktur einer Familie zu begründen. Bei Aufgaben zu Bernoulli-Versuchen ist die Unabhängigkeit sämtlicher Versuche eine angegebene Modellannahme; sie muss vor dem Multiplizieren genannt werden.

7. Eine Zufallsvariable zählt den untersuchten Gegenstand

Eine Zufallsvariable ordnet jedem Ergebnis eine Zahl zu. Verschiedene Ergebnisse können denselben Wert erzeugen. Ihre Verteilung gibt mögliche Werte und deren Wahrscheinlichkeiten an. Ihr Erwartungswert ist das mit den Wahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel dieser Werte und kein Wert, den der Versuch notwendigerweise erzeugen muss.

Eine Bernoulli-Variable ist bei Erfolg eins und sonst null, mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Ihr Erwartungswert beträgt p. Weil ihr Quadrat gleich ihr selbst ist, beträgt ihre Varianz $p - p^2 = p(1 - p)$. Das Wort Erfolg ist eine Zählkonvention: Es kann ohne Werturteil einen Fehler, ein Scheitern oder ein unerwünschtes Ereignis bezeichnen.

Für eine Variable X lautet die Varianz $V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$. Sie misst die quadratische Streuung um den Erwartungswert. Die Standardabweichung ist ihre Quadratwurzel und hat dieselbe Einheit wie X. Varianz in Quadratsekunden und Standardabweichung in Sekunden sind nicht austauschbar.

Die Linearität $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ verlangt keine Unabhängigkeit. Dagegen benötigt die Addition der Varianzen zweier Variablen Voraussetzungen, insbesondere Unabhängigkeit im hier untersuchten Rahmen. Ist $Y = X$, beträgt die Varianz von $X + Y$ genau $4\,V(X)$, nicht $2\,V(X)$. Dieses Gegenbeispiel zeigt, warum die Bedingung nicht entfernt werden darf.

8. Die Binomialverteilung herleiten, statt sie zu erraten

Eine Bernoulli-Kette wiederholt n unabhängige Versuche mit jeweils zwei Ausgängen und derselben Erfolgswahrscheinlichkeit p. Die Variable X zählt die Erfolge. Sie folgt dann einer Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Prüfen Sie die vier Elemente - Wiederholung, zwei Kategorien, konstante Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit - vor der Wahl dieser Verteilung.

Für eine festgelegte Folge mit k Erfolgen und n − k Misserfolgen beträgt die Wahrscheinlichkeit p^k (1 − p)^(n − k). Es gibt C(n,k) Folgen mit genau k Erfolgen, weil die Erfolgspositionen gewählt werden müssen. Diese Folgen sind unvereinbar; ihre gleichen Wahrscheinlichkeiten werden daher addiert:

P(X = k) = C(n,k) p^k (1 − p)^(n − k).

Der Binomialkoeffizient ist kein geheimnisvoller, zu einer Potenz hinzugefügter Faktor. Er berücksichtigt, dass dieselbe Erfolgszahl in mehreren Reihenfolgen auftreten kann. Bei n = 3 und k = 2 sind Erfolg-Erfolg-Misserfolg, Erfolg-Misserfolg-Erfolg und Misserfolg-Erfolg-Erfolg verschiedene Folgen, daher der Faktor drei.

Die Formel lässt sich für p = 0 oder p = 1 über die entsprechenden sicheren Verteilungen verstehen, statt durch zweifelhafte Umformungen von 0^0. Bei p = 0 ist X immer null; bei p = 1 ist X immer n. Diese Grenzfälle bieten eine begriffliche Kontrolle der Verteilung.

9. Erwartungswert, Varianz und die Reichweite von Mittelwerten

Wir schreiben X als Summe von n unabhängigen Bernoulli-Variablen X_1, …, X_n. Aus der Linearität folgt E(X) = n p. Durch Addition unabhängiger Varianzen ergibt sich V(X) = n p(1 − p). Die Standardabweichung lautet √[n p(1 − p)]. Diese Ergebnisse betreffen die Erfolgszahl und keine relative Häufigkeit; die relative Häufigkeit X/n hat eine andere Varianz.

Bei fünfzehn unabhängigen Versuchen mit p = 0,80 beträgt die erwartete Erfolgszahl zwölf und die Varianz 2,4. Die Standardabweichung ist ungefähr 1,55. Das bedeutet nicht, dass jede Reihe zwölf Erfolge erzeugt oder jedes Ergebnis zwischen zwölf minus 1,55 und zwölf plus 1,55 liegt. Erwartungswert und Standardabweichung fassen die Verteilung zusammen, ohne Wahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse zu ersetzen.

Ein Erwartungswert kann nichtganzzahlig sein, obwohl X immer ganzzahlige Werte annimmt. Bei drei Versuchen mit Wahrscheinlichkeit 0,50 beträgt der Erwartungswert 1,5 Erfolge. Kein Versuch beobachtet anderthalb Erfolge; die Zahl beschreibt ein theoretisches Mittel. Einen möglichen Wert vom Mittelwert zu unterscheiden, verhindert, dass ein Erwartungswert gerundet und als garantiertes Ergebnis behandelt wird.

Hängt die Wahrscheinlichkeit p vom Versuch ab, folgt die gesamte Erfolgszahl im Allgemeinen auch bei Unabhängigkeit nicht mehr der klassischen Binomialverteilung. Ihr Erwartungswert kann weiterhin durch Addition der einzelnen Wahrscheinlichkeiten gefunden werden. Für Verteilung oder Varianz wird dann ein anderes Verfahren benötigt. Ein etwas komplizierteres Modell kann treffender sein als eine aus Gewohnheit gewählte Binomialverteilung.

10. Ereignisse berechnen und eine Schwelle bestimmen

Bei zehn unabhängigen Versuchen mit p = 0,20 beträgt die Wahrscheinlichkeit zweier Erfolge $C(10,2) \times 0{,}20^2 \times 0{,}80^8$, ungefähr 0,302. Die Wahrscheinlichkeit mindestens eines Erfolgs ist $1 - 0{,}80^{10}$, ungefähr 0,893. Die zweite Frage wird leichter über das Komplement behandelt; zehn Terme der Verteilung zu addieren, wäre möglich, aber unnötig lang.

Wir suchen die kleinste Anzahl n unabhängiger Versuche mit Wahrscheinlichkeit 0,20, bei der die Wahrscheinlichkeit mindestens eines Erfolgs 95 % erreicht. Benötigt wird $1 - 0{,}80^n \geq 0{,}95$, also $0{,}80^n \leq 0{,}05$. Der Logarithmus ergibt $n \ln 0{,}80 \leq \ln 0{,}05$. Weil ln 0,80 negativ ist, kehrt die Division die Ungleichung um: $n \geq \ln 0{,}05 / \ln 0{,}80$, ungefähr 13,43. Die kleinste ganze Zahl ist vierzehn.

Wir prüfen die benachbarten Werte: Dreizehn Versuche ergeben ungefähr 94,5 %, vierzehn ungefähr 95,6 %. Diese Kontrolle bestätigt die ganzzahlige Rundung und die Minimalität. Ein Taschenrechner, der 13,43 anzeigt, beantwortet eine Frage nach einer Anzahl von Versuchen nicht unmittelbar.

Bei einer Wahrscheinlichkeit der Form $P(X \leq k)$ werden die Terme von null bis einschließlich k addiert. Bei $P(X > k)$ kann gegebenenfalls $1 - P(X \leq k)$ verwendet werden. Lesen Sie die Einbeziehung der Schwelle genau: „mehr als fünf“ bedeutet nicht „mindestens fünf“. Viele Fehler bei der Binomialverteilung entstehen bei dieser Übersetzung, obwohl Formel und Parameter richtig sind.

11. Aufgaben mit ausgearbeiteten Lösungen und Deutung

Aufgabe A. Bilden Sie einen Ausschuss aus zwei von sechs Personen und wählen Sie anschließend eine vorsitzende Person aus den beiden. Es gibt C(6,2) = 15 Ausschüsse und für jeden zwei mögliche Vorsitzende: dreißig Möglichkeiten. Alternativ kann zuerst die vorsitzende Person und anschließend das andere Mitglied gewählt werden, was 6 × 5 ergibt. Beide Verfahren liefern wieder dreißig, weil sie dieselben Konfigurationen zählen.

Aufgabe B. Eine Urne enthält vier rote und eine blaue Kugel. Zwei Ziehungen ohne Zurücklegen werden durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit genau einer roten Kugel beträgt P(rot dann blau) + P(blau dann rot), also (4/5)(1/4) + (1/5)(4/4) = 2/5. Eine Binomialverteilung mit p = 4/5 wäre ungeeignet, weil sich die zweite bedingte Wahrscheinlichkeit verändert.

Aufgabe C. Sechs unabhängige Versuche haben die Erfolgswahrscheinlichkeit 1/2. Die Wahrscheinlichkeit mindestens fünf Erfolge beträgt [C(6,5) + C(6,6)]/2^6 = 7/64, ungefähr 10,9 %. Die Rechnung schließt fünf und sechs ein. Die Symmetrie der Verteilung liefert dieselbe Wahrscheinlichkeit für höchstens einen Erfolg und damit eine Kontrolle.

Aufgabe D. Ein Punktwert sei Y = 3X − 2, wobei X einer Binomialverteilung mit den Parametern zehn und 0,20 folgt. Sein Erwartungswert beträgt 3 × 2 − 2 = 4. Seine Varianz beträgt 9 × 1,6 = 14,4. Zwei zu subtrahieren, verändert die Streuung nicht; die Multiplikation mit drei multipliziert die Standardabweichung mit drei und die Varianz mit neun.

Aufgabe E. „Ein Ereignis hat die Wahrscheinlichkeit 1 %, also muss es in hundert Versuchen einmal eintreten.“ Diese Behauptung ist falsch. Bei Unabhängigkeit und konstanter Wahrscheinlichkeit beträgt die Wahrscheinlichkeit, es in hundert Versuchen nie zu beobachten, $0{,}99^{100}$, ungefähr 36,6 %. Die erwartete Anzahl

beträgt tatsächlich eins, legt aber nicht das Ergebnis jeder Reihe fest.

12. Was eine Wahrscheinlichkeitslösung sichtbar machen muss

Eine Lösung muss Ereignisse vor der Vergabe von Symbolen beschreiben, den Ablauf angeben, das Bedingen begründen und die Voraussetzungen für Produkte nennen. Sie muss eine Wahrscheinlichkeit zwischen null und eins oder den entsprechenden Prozentsatz darstellen und anschließend in der richtigen Population deuten. Erwartungswert, relative Häufigkeit und bedingte Wahrscheinlichkeit können einander nicht ersetzen.

Die numerische Genauigkeit muss zur Frage passen. Zum Vergleich zweier Wahrscheinlichkeiten nahe einer Schwelle bleiben bis zur Schlussfolgerung ausreichend viele Stellen erhalten. Für eine allgemeine Veranschaulichung können drei signifikante Stellen genügen. Die abschließende Rundung darf in keinem Fall die Richtung einer Ungleichung verbergen oder eine Schätzung in Gewissheit verwandeln.

Bezugsquelle

Der Lehrplan des mathematischen Schwerpunktfachs der französischen Terminale gibt den Rahmen für Abzählen, Bernoulli-Ketten und Summen von Variablen. Die vorstehenden Beweise, fiktiven Situationen und Aufgaben sind eigenständig verfasst: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Kapitel 11 - Geometrie im Raum: Vektoren, Ebenen und Abstände

Historischer Bezug - Descartes: eine Figur mit Gleichungen verbinden

La Géométrie erschien 1637 als Beigabe zu Descartes' Discours de la méthode. Die institutionelle Darstellung der BnF hebt seinen Ansatz hervor, geometrische Probleme in Gleichungen zu überführen. Der Zusammenhang mit unserem Kapitel liegt im Wechsel zwischen einem geometrischen Objekt und einem algebraischen Ausdruck: Ein Vektor, eine Gerade oder eine Ebene muss seine Bedeutung behalten, wenn wir seine Koordinaten berechnen. Dieser historische Bezug bedeutet nicht, dass Descartes bereits unseren vollständigen modernen Vektorformalismus in drei Dimensionen verwendete. Er hilft uns, eine Darstellungsmethode zu verstehen, ersetzt aber nicht die geometrische Prüfung des Ergebnisses.

Historische Quelle: Bibliothèque nationale de France - institutionelle Darstellung: https://www.bnf.fr/fr/mediatheque/les-equations-la-methode-de-descartes-pour-resoudre-les-problemes-geometriques

1. Eine Figur betrachten, ohne von ihr einen Beweis zu verlangen

Eine räumliche Darstellung auf einem Blatt Papier erhält manche Beziehungen und verzerrt andere. Zwei parallel gezeichnete Strecken können unterschiedliche Richtungen darstellen; ein rechter Winkel kann in der Perspektive nicht rechtwinklig aussehen. Die Figur hilft, Punkte, Flächen und Voraussetzungen zu ordnen. Ein Beweis beruht auf gesicherten geometrischen oder algebraischen Beziehungen und nicht allein auf einem visuellen Eindruck.

Ein perspektivisch gezeichneter Würfel regt beispielsweise dazu an, eine Flächendiagonale von einer Raumdiagonale zu unterscheiden. Die erste liegt in der Ebene einer Seitenfläche; die zweite verbindet gegenüberliegende Eckpunkte durch den Raum. In einem Würfel mit Kantenlänge a betragen ihre Längen $a\sqrt{2}$ beziehungsweise $a\sqrt{3}$. Mit einem Lineal lassen sie sich in der Zeichnung nicht zuverlässig vergleichen, wenn die Projektion unterschiedliche Richtungen unterschiedlich stark verkürzt.

Die Koordinatengeometrie übersetzt Konfigurationen in Koordinaten und Gleichungen. Sie beseitigt die Geometrie nicht, sondern liefert eine weitere Sprache, um Kollinearität, Parallelität, Orthogonalität oder Schnittbeziehungen auszudrücken. Eine vollständige Lösung muss nach der Rechnung zur räumlichen Bedeutung zurückkehren. Ein Gleichungssystem ohne Lösung sagt etwas über die untersuchten Objekte aus; es ist mehr als ein rein rechnerisches Ergebnis.

2. Punkte, Vektoren und Koordinatensysteme: drei verschiedene Objekte

Ein Punkt beschreibt eine Position. Ein Vektor beschreibt eine gerichtete Verschiebung, also eine Richtung mit einem Betrag. In einem Koordinatensystem ergeben sich die Koordinaten des Vektors AB aus denen von B minus denen von A. Für $A = (1{,}2{,}-1)$ und $B = (4{,}0{,}3)$ gilt daher $AB = (3{,}-2{,}4)$. Die Koordinaten von B allein als „Koordinaten von AB“ zu bezeichnen, wäre falsch, sofern A nicht der Ursprung des Koordinatensystems ist.

Ein Vektor kann durch gerichtete Strecken an verschiedenen Orten dargestellt werden. Zwei Vektoren sind gleich, wenn Richtung, Orientierung und Länge übereinstimmen; ihre Anfangs- und Endpunkte müssen dabei nicht dieselben sein. Diese Unterscheidung erlaubt es, die Seiten eines Parallelogramms oder

eines Würfels zu verwenden, ohne Verschiebung und absolute Position zu verwechseln.

Eine Basis des Raumes besteht aus drei Vektoren, sodass sich jeder Vektor eindeutig als ihre Linearkombination ausdrücken lässt. In einem orthonormalen Koordinatensystem sind die Basisvektoren Einheitsvektoren und paarweise orthogonal. Die üblichen Koordinatenformeln für Betrag und Skalarprodukt hängen von dieser Eigenschaft ab. Auf eine beliebige Basis lassen sie sich nicht unverändert übertragen.

Bilden etwa zwei Einheitsbasisvektoren einen Winkel von sechzig Grad, so beträgt die Länge ihrer Summe $\sqrt{3}$ und nicht $\sqrt{2}$. Koordinaten allein reichen also nicht aus, um eine Länge zu berechnen, wenn die Geometrie der Basis unbekannt ist. In den Aufgaben dieses Kapitels ist das Koordinatensystem orthonormal, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes angegeben wird.

3. Linearkombinationen, Kollinearität und Komplanarität

Zwei von null verschiedene Vektoren sind kollinear, wenn einer ein reelles Vielfaches des anderen ist. Der Faktor kann positiv oder negativ sein; sein Vorzeichen zeigt eine gleiche oder entgegengesetzte Orientierung an. Zur Prüfung der Kollinearität mit Koordinaten suchen wir einen gemeinsamen Faktor für alle Komponenten. Wir dividieren nicht unbesehen durch eine Komponente, die null sein könnte.

Die Vektoren $(2,-1,0)$ und $(-6,3,0)$ sind mit dem Faktor -3 kollinear. Die Vektoren $(2,-1,0)$ und $(-6,3,1)$ sind es nicht, weil die dritte Komponente die Gleichheit verhindert. Der Nullvektor ist eine Linearkombination jedes Vektors, kann aber nicht als Richtungsvektor einer Geraden dienen. Diese Besonderheit ist bei jedem Beweis zu beachten, der einen Richtungsvektor verwendet.

Drei Punkte A, B und C liegen auf einer Geraden, wenn AB und AC kollinear sind. Um zu zeigen, dass vier Punkte in einer Ebene liegen, können wir prüfen, ob AD eine Kombination von AB und AC ist, sofern diese beiden Vektoren nicht kollinear sind. Wir lösen dann AD = α AB + β AC. Existiert eine Lösung, gehört D zur Ebene durch A, die von diesen beiden Richtungen aufgespannt wird.

Sei A der Ursprung, AB = (1,0,1) und AC = (0,1,1). Jeder Punkt der Ebene hat Koordinaten (α,β,α + β). Ihre Gleichung lautet daher z = x + y. Der Punkt (1,1,2) gehört zu ihr, der Punkt (1,1,3) nicht. Diese Deutung verbindet eine Linearkombination unmittelbar mit einer Koordinatengleichung.

Sind die beiden gewählten Vektoren kollinear, spannen sie nur eine Gerade auf. Wir müssen dann andere Richtungen wählen, um die Ebene zu beschreiben, oder einen entarteten Fall gesondert behandeln. Eine Formel mit zwei Parametern stellt nicht automatisch eine Ebene dar, wenn ihre Richtungen nicht unabhängig sind.

4. Eine Gerade mit einem Parameter darstellen

Eine Gerade durch A mit einem von null verschiedenen Richtungsvektor u ist die Menge aller Punkte M mit AM = t u, wobei t die reellen Zahlen durchläuft. Für A = (a,b,c) und u = (u_1,u_2,u_3) schreiben wir x = a + t u_1, y = b + t u_2, z = c + t u_3. Alle drei Koordinaten hängen von demselben Parameter t ab. Drei unabhängige Parameter würden eine andere Menge beschreiben.

Der gewählte Ausgangspunkt und die Länge des Richtungsvektors sind nicht eindeutig bestimmt. Wird u durch 2u ersetzt, bleibt die Gerade erhalten; lediglich der Parameter wird anders skaliert. Auch ein anderer Punkt der Geraden kann A ersetzen, ohne die Menge zu verändern. Zwei unterschiedliche Ausdrücke können somit genau dasselbe Objekt darstellen.

Um zu prüfen, ob ein Punkt zur Geraden gehört, suchen wir einen einzigen Wert von t, der alle Koordinatengleichungen zugleich erfüllt. Bei der Geraden (1 + 2t, t, 2 − t) entspricht der Punkt (3,1,1) in allen drei Gleichungen t = 1. Der Punkt (3,1,2) passt nicht: Die ersten beiden Koordinaten verlangen t = 1, doch die dritte wäre dann eins.

Eine ganze Gerade, ein Strahl und eine Strecke unterscheiden sich durch die zulässigen Parameterwerte. Für die Strecke von A nach B eignet sich der Ausdruck A + t AB mit t zwischen null und eins. Durchläuft t alle reellen Zahlen, beschreibt der Ausdruck die Gerade einschließlich ihrer Teile jenseits der Endpunkte. Wer diese Einschränkung vergisst, könnte einen Schnittpunkt berechnen, der außerhalb der tatsächlich untersuchten Strecke liegt.

5. Skalarprodukt, Betrag und Winkel

In einem orthonormalen Koordinatensystem gilt u·v = u₁v₁ + u₂v₂ + u₃v₃. Der Betrag von u ist √(u·u). Für von null verschiedene Vektoren ist das Skalarprodukt außerdem gleich ||u|| ||v|| cos θ, wobei θ der Winkel zwischen den Vektoren zwischen null und π ist. Diese beiden Ausdrücke verbinden das Rechnen mit Koordinaten mit der geometrischen Deutung.

Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt null ist. Für u = (1,2,−1) und v = (2,−1,0) ergibt sich zwei minus zwei, also null. Die Prüfung erfordert alle Komponenten; die scheinbare Rechtwinkligkeit ihrer Projektionen in einer Figur reicht nicht aus.

In einem Würfel mit Kantenlänge eins kann der Vektor entlang einer Kante (1,0,0) und der entlang einer Raumdiagonale (1,1,1) lauten. Der Kosinus des Winkels zwischen ihnen ist 1/√3. Der Winkel beträgt daher ungefähr 54,7 Grad. Es sind nicht fünfundvierzig Grad; das ist der Winkel zwischen einer

Flächendiagonale und einer Kante dieser Seitenfläche. Es handelt sich um unterschiedliche Konfigurationen.

Die Entwicklung $||u + v||^2 = ||u||^2 + 2u\cdot v + ||v||^2$ ergibt den Satz des Pythagoras, wenn das Skalarprodukt null ist. Sie erlaubt auch, das Skalarprodukt durch Längen auszudrücken. Das Vorzeichen des gemischten Terms zeigt an, ob die Summe länger oder kürzer ist, als sie im orthogonalen Fall wäre.

Zwei Geraden mit orthogonalen Richtungen müssen sich nicht schneiden. Im Raum haben die Gerade (t,0,0) und die Gerade (0,1,s) orthogonale Richtungen, aber keinen gemeinsamen Punkt, weil ihre zweiten Koordinaten stets null beziehungsweise eins bleiben. Wir sprechen hier von der Orthogonalität der Richtungen; die Bezeichnung senkrechter Geraden verlangt üblicherweise zusätzlich einen Schnittpunkt. Diese Unterscheidung verhindert, dass eine Anschauung aus der Ebene vorschnell auf den Raum übertragen wird.

6. Eine Ebene durch einen Normalenvektor definieren

Ein von null verschiedener Normalenvektor n steht orthogonal auf jeder Richtung in einer Ebene. Geht die Ebene durch A, gehört ein Punkt M zu ihr, wenn $n\cdot AM = 0$ gilt. Für $n = (a,b,c)$ und $A = (x_A,y_A,z_A)$ erhalten wir $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$, also eine Gleichung $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$.

Mindestens einer der Koeffizienten a, b und c muss von null verschieden sein. Andernfalls wäre die Gleichung eine Identität oder ein Widerspruch und keine Ebenengleichung. Werden alle Koeffizienten mit derselben von null verschiedenen Konstanten multipliziert, bleibt die Ebene erhalten. Ihr Normalenvektor ist deshalb nicht eindeutig, und seine Orientierung schreibt der Ebene keine verbindliche Ausrichtung vor.

Die Ebene $x + 2y - z - 3 = 0$ hat den Normalenvektor $(1,2,-1)$ und enthält $A = (3,0,0)$. Auch der Punkt $(1,1,0)$ gehört zu ihr. Eine Richtung mit Vektor u liegt in dieser Ebene, wenn $n \cdot u = 0$ gilt; ein Punkt liegt in ihr, wenn seine Koordinaten die Gleichung erfüllen. Wer diese beiden Prüfungen verwechselt, übersieht den konstanten Term, der die Lage festlegt.

Um aus zwei nicht kollinearen Richtungen einen Normalenvektor zu bestimmen, können wir n suchen, dessen Skalarprodukt mit beiden null ist, und dazu ein Gleichungssystem lösen. Für einen einfachen Fall ist keine unbekannte Technik nötig. Das Kreuzprodukt liefert eine weitere Methode, ist hier jedoch eine mögliche Erweiterung und keine versteckte Voraussetzung.

7. Lagebeziehungen: aus einem Gleichungssystem folgt eine geometrische Aussage

Für den Schnitt der Geraden $A + t\,u$ mit der Ebene $n \cdot M + d = 0$ setzen wir die Koordinaten von M ein. Es entsteht $n \cdot A + d + t(n \cdot u) = 0$. Ist $n \cdot u$ von null verschieden, gibt es genau einen Wert von t und damit genau einen Schnittpunkt. Ist $n \cdot u$ null, verläuft die Gerade parallel zur Ebene; sie liegt in der Ebene, wenn auch $n \cdot A + d$ null ist, und hat andernfalls keinen Punkt mit ihr gemeinsam.

Die Gerade $M(t) = (1 + 2t, t, 2 - t)$ und die Ebene $x + 2y - z - 3 = 0$ ergeben $-4 + 5t = 0$. Der Schnitt entspricht $t = 4/5$ und dem Punkt $(13/5,4/5,6/5)$. Wir prüfen diesen Punkt in der Ebenengleichung. Beschriebe dieselbe Parametrisierung eine Strecke mit t zwischen null und eins, wäre der Schnittpunkt weiterhin zulässig; bei t zwischen zwei und drei wäre er es nicht mehr.

Für zwei Geraden verwenden wir unterschiedliche Parameter t und s und setzen dann ihre Koordinaten gleich. Eine eindeutige Lösung liefert einen Schnittpunkt. Keine Lösung kann zu verschiedenen

parallelen oder zu windschiefen Geraden gehören; anhand ihrer Richtungen unterscheiden wir diese Fälle. Unendlich viele Lösungen können ausdrücken, dass die Geraden zusammenfallen und dieselbe Menge beschreiben.

Zwei Ebenen mit kollinearen Normalenvektoren sind parallel oder identisch. Bei nicht kollinearen Normalen schneiden sie sich in einer Geraden. Die Ebenen $x + y + z = 1$ und $x - y = 0$ liefern beispielsweise $x = y = t$ und $z = 1 - 2t$. Der Richtungsvektor ihrer Schnittgeraden lautet $(1,1,-2)$. Jeder vorgeschlagene Punkt muss beide Gleichungen erfüllen und nicht nur eine davon.

8. Orthogonale Projektion auf eine Gerade

Der Lotfußpunkt H eines Punktes M auf einer Geraden durch A mit Richtung u gehört zur Geraden, und MH steht orthogonal auf u. Mit $H = A + t\,u$ wird diese Bedingung zu $(A + t\,u - M)\cdot u = 0$. Weil u von null verschieden ist, erhalten wir $t = [(M - A)\cdot u]/||u||^2$.

Für A im Ursprung, $u = (1,1,0)$ und $M = (2,2,1)$ ergibt sich $t = 4/2 = 2$. Der projizierte Punkt ist $H = (2,2,0)$, und der Abstand von M zur Geraden beträgt eins. Würde der Richtungsvektor durch $(2,2,0)$ ersetzt, wäre der Parameter eins; der Punkt H und der Abstand blieben gleich.

Warum ist dieser Abstand minimal? Für jeden anderen Punkt P der Geraden steht MH orthogonal auf HP. Nach dem Satz des Pythagoras gilt $MP^2 = MH^2 + HP^2$ und somit $MP \geq MH$. Gleichheit setzt $P = H$ voraus. Dieser Beweis verbindet die Konstruktion mit dem Optimierungsproblem, statt eine Abstandsformel ohne Begründung zu präsentieren.

Beim Abstand zu einer Strecke kann ein zusätzlicher Schritt nötig sein. Liegt die Projektion auf die Gerade außerhalb der Strecke, ist der nächstgelegene Punkt der Strecke ein Endpunkt. Das Problem entspricht dann nicht mehr genau dem einer unendlichen Geraden.

Die Prüfung des Parameterwertes verhindert, dass der richtige Abstand zum falschen Objekt berechnet wird.

9. Orthogonale Projektion auf eine Ebene

Für die Ebene a x + b y + c z + d = 0 mit Normalenvektor n = (a,b,c) liegt die Projektion H von M auf der Geraden durch M mit Richtung n. Wir können H = M − α n schreiben. Die Forderung, dass H zur Ebene gehört, liefert α = (a x_M + b y_M + c z_M + d)/(a² + b² + c²).

Für M = (1,1,4) und die Ebene x + 2y − z − 3 = 0 beträgt der Zähler −4 und der Nenner sechs. Wir erhalten H = M + (2/3)(1,2,−1), also H = (5/3,7/3,10/3). Das Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt null. Der Vektor MH ist zum Normalenvektor kollinear; damit sind beide Projektionsbedingungen erfüllt.

Der Abstand zur Ebene ist der Betrag von MH, also |a x_M + b y_M + c z_M + d|/√(a² + b² + c²). Im Beispiel sind das 4/√6, ungefähr 1,63 Längeneinheiten. Der Absolutbetrag beseitigt das Vorzeichen, das mit der jeweiligen Seite der Ebene zusammenhängt; ein Abstand kann nicht negativ sein.

Die Minimalität wird wie bei der Geraden bewiesen. Für jeden Punkt P der Ebene ist HP eine Richtung in der Ebene und daher orthogonal zu MH. Somit gilt MP² = MH² + HP². H ist der einzige Punkt, an dem der minimale Abstand erreicht wird. Die Formel ist also mehr als eine praktische Rechnung: Sie drückt eine bewiesene geometrische Eigenschaft aus.

10. Geometrische Ortsmengen und Volumina

Die Mittelsenkrechtenebene der Strecke AB ist die Menge der Punkte mit gleichem Abstand zu A und B. Bei der Entwicklung von $MA^2 = MB^2$ heben sich die quadratischen Terme in den Koordinaten von M auf, und es entsteht eine Ebenengleichung. Diese Ebene geht durch den Mittelpunkt der Strecke und hat AB als Normalenvektor. Für A = (0,0,0) und B = (2,0,0) lautet ihre Gleichung $x = 1$.

Eine Kugeloberfläche mit Mittelpunkt O und Radius r ist die Menge der Punkte M mit $OM = r$. In einem orthonormalen Koordinatensystem mit Ursprung O lautet ihre Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Die zugehörige Vollkugel wird durch eine Kleiner-oder-gleich-Ungleichung beschrieben. Oberfläche und Körper sind unterschiedliche Mengen.

Die Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ schneidet die Ebene $z = 1$ im Kreis $x^2 + y^2 = 3$, der in dieser Ebene liegt und den Radius $\sqrt{3}$ hat. Eine Ebene mit einem Abstand größer als zwei vom Mittelpunkt schneidet die Kugeloberfläche nicht; bei genau zwei berührt sie sie tangential. Diese Fälle lassen sich über den Abstand des Mittelpunktes zur Ebene verstehen, bevor eine ausführliche Rechnung erfolgt.

Bei einem Tetraeder mit den Eckpunkten O = (0,0,0), A = (2,0,0), B = (0,3,0), C = (0,0,4) ist die Grundfläche OAB ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt drei. Die Höhe von C aus beträgt vier. Das Volumen ist daher ein Drittel von drei mal vier, also vier Volumeneinheiten. Die Höhe in dieser Definition muss senkrecht auf der Grundfläche stehen; die Länge einer schrägen Kante ist nicht immer die Höhe.

11. Aufgaben mit Lösungen und Prüfungen

Aufgabe A. Liegen die Punkte A = (1,0,2), B = (3,1,1) und C = (5,2,0) auf einer Geraden? Es gilt AB = (2,1,−1) und AC = (4,2,−2) = 2 AB. Sie liegen auf einer Geraden. Der Faktor zwei bedeutet, dass C von A aus in derselben Richtung doppelt so weit entfernt ist wie B; C liegt nicht zwischen A und B.

Aufgabe B. Bestimme die Ebene durch A = (1,0,2) mit Normalenvektor n = (2,−1,3). Ihre Gleichung lautet 2(x − 1) − y + 3(z − 2) = 0, also 2x − y + 3z − 8 = 0. Prüfe zunächst A; die Richtung (1,2,0) ist tatsächlich eine Richtung in der Ebene, denn ihr Skalarprodukt mit n ist null.

Aufgabe C. Liegt die Gerade (t,2 − t,1) in der Ebene x + y + z = 3? Die Summe der Koordinaten beträgt stets drei. Somit ist die ganze Gerade in der Ebene enthalten und nicht nur der Punkt zu einem bestimmten Wert von t. Das symbolische Einsetzen erlaubt hier eine stärkere Aussage als eine einzelne Zahlenprobe.

Aufgabe D. Berechne den Abstand von M = (0,0,0) zur Ebene 2x − y + 2z − 6 = 0. Der Absolutbetrag des Zählers beträgt sechs, und der Betrag des Normalenvektors drei. Der Abstand ist zwei. Wird die Ebenengleichung mit fünf multipliziert, vergrößern sich Zähler und Nenner jeweils um den Faktor fünf; das Ergebnis muss unverändert bleiben.

Aufgabe E. Schneiden sich eine Gerade mit Richtung (1,0,0) und eine Gerade mit Richtung (0,1,0) notwendigerweise? Nein. Ihre Richtungen sind orthogonal, doch die Geraden können in verschiedenen horizontalen Ebenen liegen. Um auf einen Schnittpunkt zu schließen, müssen auch ihre Punkte untersucht und die Schnittbedingungen gelöst werden.

12. Einen Beweis im Raum ordnen

Die Methode hängt von der Frage ab. Zur Zugehörigkeit setzen wir Koordinaten ein oder suchen einen Parameter. Zur Parallelität vergleichen wir Richtungen oder Normalen. Zur Orthogonalität verwenden wir ein Skalarprodukt und benennen dabei die beteiligten Objekte. Für einen minimalen Abstand konstruieren wir eine Projektion und begründen das Minimum mit dem Satz des Pythagoras. Diese Einteilung macht aus einer komplexen Figur eine Folge gezielter Prüfungen.

Rechnungen müssen ihre Bedeutung behalten. Ein Parameterwert ist kein Abstand; ein Normalenvektor ist kein Punkt; eine Gleichung, die ein Punkt erfüllt, beschreibt nicht automatisch eine ganze Gerade. Formuliere nach jedem Schritt erneut, was das Ergebnis feststellt und was noch gezeigt werden muss. Diese Disziplin ermöglicht es, Algebra zu verwenden, ohne das geometrische Objekt aus dem Blick zu verlieren.

Bezug zum Lehrplan

Französischer Lehrplan des Mathematik-Schwerpunktfachs in der Terminale, Abschnitte zu Vektoren, Orthogonalität und räumlichen Darstellungen. Die Konfigurationen und didaktischen Beweise sind eigenständig verfasst: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

Kapitel 12 - Statistik, Konzentration und algorithmische Methoden

Historischer Bezug - Bienaymé und Tschebyscheff: Abweichungen begrenzen

Bienaymé veröffentlichte 1853 die Ungleichung, die heute mit den Namen Bienaymé und Tschebyscheff verbunden wird; Tschebyscheff veröffentlichte sie seinerseits 1867. Diese Geschichte verdeutlicht die Rolle einer Wahrscheinlichkeitsschranke: Sie kann das Risiko einer Abweichung begrenzen, ohne die gesamte Verteilung genau zu beschreiben. Das Kapitel unterscheidet deshalb eine beobachtete Häufigkeit, eine theoretische Wahrscheinlichkeit und eine obere Schranke, die ungenau sein kann, unter ihren Voraussetzungen aber gültig bleibt. Dieser historische Bezug garantiert nicht, dass eine bestimmte Stichprobe nahe am Erwartungswert liegt, und schreibt die Entdeckung nicht nur einer einzigen Person zu.

Historische Quelle: University of St Andrews - MacTutor: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bienayme/

1. Daten vor ihrer Deutung beschreiben

Eine Zahlenreihe hat keine von ihrer Herkunft unabhängige Bedeutung. Wir fragen, welche Größe in welcher Einheit, für welche Grundgesamtheit, zu welchen Zeitpunkten und nach welchem Verfahren gemessen wurde. Zeitdauern, Massen und als Zahlen codierte Kategorien werden nicht auf dieselbe Weise behandelt. Eine Postleitzahl ist keine Größe, deren Mittelwert unmittelbar eine geografische Bedeutung hätte.

Die beschreibende Statistik fasst die vorhandenen Daten zusammen. Die schließende Statistik versucht, über diese

Beobachtungen hinaus Informationen über eine Grundgesamtheit oder einen Mechanismus zu gewinnen. Der Übergang zwischen beiden erfordert Annahmen über die Stichprobenziehung. Ein Diagramm aus hundert freiwilligen Antworten kann diese Antworten beschreiben; es repräsentiert nicht automatisch alle Einwohner eines Gebietes.

Prüfe vor der Rechnung fehlende Werte, doppelte Einträge, Änderungen der Einheit und Kategorien. Ein fehlender Wert darf nicht ohne Begründung durch null ersetzt werden. Null ist ein Wert, und seine Einführung kann einen Mittelwert oder Anteil verändern. Ebenso ist ein doppelter Eintrag nicht immer eine unabhängige Wiederholung; er kann auf einen Eingabefehler zurückgehen.

Eine ehrliche Zusammenfassung nennt in der Nähe des Ergebnisses auch den Stichprobenumfang und die Erhebungsmethode. Die Aussage „Der Mittelwert ist sechs“ erlaubt ohne Einheit, Streuung oder Umfang keine Beurteilung einer Reihe. Die Genauigkeit der Anzeige erzeugt keine Genauigkeit der Information: Sechs mit zehn Nachkommastellen zu schreiben, korrigiert weder eine grobe Messung noch eine verzerrte Auswahl.

2. Mittelwert, Median und Streuung

Für n Beobachtungen x₁, …, x_n ist das arithmetische Mittel ihre Summe geteilt durch n. Es berücksichtigt jeden Wert und kann empfindlich auf extreme Beobachtungen reagieren. Bei Gruppen unterschiedlicher Größe muss der Gesamtmittelwert die Gruppenmittelwerte mit den jeweiligen Gruppengrößen gewichten; das einfache Mittel der Mittelwerte ist nur in besonderen Fällen richtig.

Der Median teilt eine geordnete Reihe in zwei Teile. Bei einer ungeraden Zahl von Beobachtungen ist er der mittlere Wert. Bei einer geraden Zahl wird nach der üblichen Rechenkonvention das

Mittel der beiden mittleren Werte genommen. Diese Konvention muss beim Vergleich von Software oder Darstellungen verstanden werden. Auch Quartile erfordern eine ausdrücklich genannte Konvention: Manche Verfahren wählen beobachtete Werte, andere interpolieren.

Für die Reihe 2, 3, 3, 4, 18 beträgt der Mittelwert sechs und der Median drei. Der Wert achtzehn zieht den Mittelwert nach oben. Das macht ihn nicht falsch, sondern zeigt, dass er allein keinen „typischen“ Wert beschreibt. Je nach Frage können Mittelwert, Median und Streuung gemeinsam angegeben werden, statt den Kennwert auszuwählen, der eine gewünschte Schlussfolgerung am besten unterstützt.

Die beschreibende Varianz mit Divisor n ist das Mittel der quadrierten Abweichungen vom Mittelwert. Sie lässt sich auch als Mittel der Quadrate minus dem Quadrat des Mittelwertes berechnen. In der vorigen Reihe ist das Mittel der Quadrate 72,4 und das Quadrat des Mittelwertes sechsunddreißig; die Varianz beträgt daher 36,4 und die Standardabweichung ungefähr 6,03. Die Standardabweichung behält die Einheit der Beobachtungen; die Varianz verwendet deren Quadrat.

Eine Stichprobenvarianz mit Divisor n − 1 folgt einer anderen Konvention und dient einem bestimmten Schätzungsziel. Sie ist keine Korrektur, die automatisch auf jede beschreibende Datenreihe anzuwenden wäre. Bevor ein Rechenbefehl verwendet wird, müssen sein Divisor und sein Zweck bekannt sein. Zwei unterschiedliche Ergebnisse können auf diese Konvention zurückgehen, ohne dass ein Rechenfehler vorliegt.

3. Gewichtung und Zusammensetzungseffekte

Zwei Gruppen haben die Mittelwerte zehn beziehungsweise zwanzig. Enthält die erste neunzig und die zweite zehn Beobachtungen, beträgt der Gesamtmittelwert elf und nicht fünfzehn. Die Gewichtung drückt den Umfang der Informationen in jeder Gruppe aus. Sind die Gruppengrößen bekannt, kann sie nicht durch eine intuitive Wahl ersetzt werden.

Vergleiche zwischen Grundgesamtheiten können sich mit deren Zusammensetzung verändern. Betrachten wir zwei fiktive Tätigkeiten, eine leichte und eine schwierige. Eine Organisation kann bei jeder Tätigkeit eine höhere Erfolgsquote, insgesamt jedoch eine niedrigere Quote haben, wenn sie sehr viel mehr schwierige Fälle bearbeitet. Bevor ein allgemeiner Vorteil verkündet wird, sind die Kategorien und ihre Verteilung zu untersuchen.

Dieses Phänomen rechtfertigt nicht, jeden zusammenfassenden Kennwert abzulehnen. Es fordert dazu auf, die Frage ausdrücklich zu formulieren: Soll die Leistung innerhalb einer vergleichbaren Kategorie gemessen werden oder das Gesamtergebnis einer Organisation bei ihrer tatsächlichen Tätigkeit? Beide Fragen sind sinnvoll, verlangen aber nicht unbedingt dieselbe Gewichtung. Genauigkeit bedeutet, nicht unangekündigt von einer zur anderen zu wechseln.

Auch ein Diagramm muss eine verständliche Skala behalten. Eine verkürzte senkrechte Achse kann eine kleine Änderung gewaltig erscheinen lassen; eine logarithmische Skala kann zum Vergleich von Verhältnissen nützlich sein, muss aber gekennzeichnet werden. Die Darstellung ist kein zusätzlicher Beweis, der von den dargestellten Zahlen unabhängig wäre.

4. Summen und Mittelwerte von Zufallsvariablen

Wir betrachten n unabhängige, identisch verteilte Variablen mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz σ². Ihre Summe S_n hat den Erwartungswert nμ und die Varianz nσ². Ihr Mittelwert M_n = S_n/n hat den Erwartungswert μ und die Varianz σ²/n. Seine Standardabweichung beträgt σ/√n. Diese Beziehung beschreibt die Verringerung der Streuung des Mittelwertes innerhalb dieses Wiederholungsmodells.

Um die Standardabweichung zu halbieren, muss der Stichprobenumfang daher mit vier und nicht mit zwei multipliziert werden. Wird n mit hundert multipliziert, wird die Standardabweichung des Mittelwertes durch zehn geteilt. Die Verbesserung wächst nicht linear mit der Zahl der Beobachtungen. Diese Abhängigkeit erklärt den Aufwand für eine höhere Genauigkeit der Stichprobe.

Die Voraussetzungen sind wesentlich. Wiederholen alle Beobachtungen denselben gemeinsamen Zufallsfehler, profitiert ihr Mittelwert nicht von derselben Verringerung. Folgen die Werte nicht derselben Verteilung, muss ihre Deutung angepasst werden. Wählt ein Erhebungsverfahren stets dieselbe Kategorie aus, kann eine große Stichprobe einen sehr präzisen Mittelwert liefern, ohne für die angestrebte Grundgesamtheit repräsentativ zu sein.

Die Beziehung σ/√n ist eine theoretische Eigenschaft der Verteilung des Mittelwertes und kein Versprechen, dass jeder beobachtete Mittelwert genau diesen Abstand von μ hat. Sie bedeutet auch nicht, dass die Standardabweichung der einzelnen Beobachtungen mit der Menge der gesammelten Daten abnimmt. Die Beobachtungen behalten ihre Verteilung; ihr Mittelwert streut im Modell weniger.

5. Die Bienaymé-Tschebyscheff-Ungleichung beweisen

Für eine Variable X mit Erwartungswert μ und endlicher Varianz V sowie ein strikt positives δ lautet die Ungleichung:

$P(|X - \mu| \geq \delta) \leq V/\delta^2$.

Sie verbindet die Wahrscheinlichkeit einer erheblichen Abweichung mit einem Streuungsmaß. Überschreitet die rechte Seite eins, bleibt die Schranke mathematisch richtig, liefert aber weniger Information als die elementare obere Schranke eins für eine Wahrscheinlichkeit. Wir können dann das Minimum der beiden Werte verwenden.

Ein kurzer Beweis setzt $Y = (X - \mu)^2$, eine nicht negative Variable. Beim Ereignis $|X - \mu| \geq \delta$ gilt $Y \geq \delta^2$. Der Erwartungswert von Y ist mindestens δ^2 mal der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses, denn alle übrigen Beiträge sind nicht negativ. Nun gilt $E(Y) = V$. Division durch δ^2 ergibt die Ungleichung. Dieser Beweis zeigt, warum das Quadrat und die Nichtnegativität eine Rolle spielen.

Die Ungleichung setzt keine Normalverteilung voraus. Ihre Allgemeinheit ist ein Vorteil, doch die Schranke kann grob sein. Ein Ergebnis $P \leq 0{,}20$ bedeutet nicht, dass die Wahrscheinlichkeit 0,20 beträgt. Die tatsächliche Wahrscheinlichkeit kann wesentlich kleiner sein. Wer eine obere Schranke mit einer Gleichheit verwechselt, verfehlt die Bedeutung dieses Werkzeugs.

Das Ereignis umfasst Abweichungen, die größer als oder gleich dem angegebenen Schwellenwert sind. Ist X diskret, kann die Einbeziehung des Randwertes wichtig sein. Übersetze die Bedingung, bevor du eine exakte Wahrscheinlichkeit berechnest oder sie mit einer Schranke vergleichst.

6. Konzentration eines Mittelwertes und Gesetz der großen Zahlen

Die Anwendung der Ungleichung auf M_n mit der Varianz σ²/n liefert P(|M_n − μ| ≥ δ) ≤ σ²/(nδ²). Für ein festes positives δ strebt die rechte Seite gegen null, wenn n wächst. Die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von mindestens δ wird im Modell somit beliebig klein. Das ist eine Form des Gesetzes der großen Zahlen.

Die Schlussfolgerung betrifft eine Wahrscheinlichkeit und nicht einen monotonen Verlauf jeder Folge beobachteter Mittelwerte. Eine neue Beobachtung kann den Mittelwert vorübergehend weiter von μ entfernen. Das Gesetz besagt auch nicht, dass eine künftige Reihe eine vergangene ausgleichen muss. Nach mehreren unabhängigen Misserfolgen bleibt die Erfolgswahrscheinlichkeit des nächsten Versuchs p; sie steigt nicht, um „das Gleichgewicht wiederherzustellen“.

Für eine Erfolgshäufigkeit F_n in einem Bernoulli-Schema gilt μ = p und σ² = p(1 − p). Die Schranke wird zu P(|F_n − p| ≥ δ) ≤ p(1 − p)/(nδ²). Weil p(1 − p) ≤ 1/4 für jedes p zwischen null und eins gilt, erhalten wir die einheitliche Schranke 1/(4nδ²), auch wenn p unbekannt ist.

Um eine obere Wahrscheinlichkeitsschranke von 5% für eine Abweichung von mindestens 0,05 sicherzustellen, verlangt die einheitliche Schranke n ≥ 1/(4 × 0,05 × 0,05²), also zweitausend. Das ist nach dieser Ungleichung ein ausreichender Umfang und nicht notwendigerweise der kleinstmögliche für eine bestimmte Verteilung. Für das Ziel 0,02 bei derselben oberen Risikoschranke ergibt sich ein ausreichender Umfang von zwölftausendfünfhundert.

Diese Zahlen beruhen auf unabhängigen Versuchen und einer konstanten Wahrscheinlichkeit. Sie garantieren weder die

Repräsentativität einer freiwilligen Befragung noch die Gültigkeit eines Fragebogens. Der Stichprobenumfang allein behebt keine Auswahlverzerrung. Wahrscheinlichkeitsbezogene Genauigkeit und Eignung des Verfahrens sind zwei verschiedene Anforderungen.

7. Was nach einer Beobachtung gesagt werden kann

Vor der Durchführung der Versuche ist F_n eine Zufallsvariable. Danach ist ihr Wert f eine vorliegende Angabe. Die Konzentrationsschranke begrenzt mögliche Abweichungen bei Wiederholungen des Verfahrens. Allein weist sie dem Parameter p nach der Beobachtung von f keine nachträgliche Wahrscheinlichkeit zu.

Um die beobachtete Häufigkeit lässt sich ein Intervall mit einer Überdeckungsgarantie konstruieren, die aus einer angegebenen Methode folgt. Das bedeutet: Bei Wiederholungen des Verfahrens unter den geltenden Voraussetzungen erzeugt die Methode mit einer kontrollierten Häufigkeit Intervalle, die p enthalten. Ohne einen zusätzlichen Rahmen darf dies nicht als „Dieser feste Parameter liegt nun mit dieser oder jener Wahrscheinlichkeit in diesem Intervall“ umformuliert werden.

Für die Wiederholung des Stoffes genügt es häufig, Schätzung, Unsicherheit und Garantie auseinanderzuhalten. Eine Häufigkeit von 0,42 beweist nicht exakt p = 0,42. Eine Risikoschranke beweist nicht, dass das Verfahren in jedem Fall erfolgreich ist. Ein hohes Konfidenzniveau in einem statistischen Rahmen beseitigt nicht die Möglichkeit eines schlecht entworfenen Verfahrens.

Betrifft eine Entscheidung Menschen, ein technisches System oder ein sensibles Phänomen, ist die statistische Auswertung nur ein Bestandteil der Überlegung. Auch die Folgen von Fehlern, die Einschränkungen und die Gültigkeit der Messung sind zu prüfen.

Dieser Leitfaden verwandelt eine Konzentrationsmethode nicht in individuelle medizinische oder finanzielle Beratung.

8. Einen Algorithmus mit Invariante und Terminierung entwerfen

Ein Algorithmus ist eine Folge von Anweisungen, deren Ergebnis erklärt werden kann. Es reicht nicht, dass ein Programm eine plausible Zahl anzeigt. Wir legen seine Eingaben, deren Definitionsbereich, seine Ausgabe, seine Schritte und seine Abbruchbedingungen fest. Zu einer Schleife gehören eine erhalten bleibende Eigenschaft, die Invariante, und eine Begründung, warum sie endet, sofern dies erforderlich ist.

Beim Bisektionsverfahren ist die Invariante, dass das aktuelle Intervall unter den verwendeten Voraussetzungen der Stetigkeit und des Vorzeichenwechsels eine Lösung enthält. Seine Länge wird bei jedem Schritt halbiert. Das Ende für eine positive Toleranz folgt aus dieser geometrischen Abnahme. Der Beweis hängt nicht von einer bestimmten Programmiersprache ab.

Um die kleinste ganze Zahl n mit q^n ≤ a für 0 < q < 1 und 0 < a < 1 zu finden, können n mit null und eine Variable v mit eins initialisiert werden. Solange v > a gilt, wird v mit q multipliziert und n erhöht. Die Invariante lautet v = q^n. Die Konvergenz von q^n gegen null gewährleistet das Ende bei exakter Rechnung. Eine numerische Umsetzung muss zusätzlich Rundung und Darstellungsgrenzen berücksichtigen.

Die Bedingungsprüfung muss zur beabsichtigten Schwelle passen. Wird v > a durch v ≥ a ersetzt, verändert sich die Antwort, wenn Gleichheit möglich ist. Das ist ein logischer Fehler und kein ästhetisches Detail. Ein Testfall, in dem die Schwelle exakt erreicht wird, kann einen Fehler sichtbar machen, der bei gewöhnlichen Werten unbemerkt bleibt.

9. Simulation: eine Verteilung erkunden, ohne sie zu beweisen

Eine Bernoulli-Simulation kann einen gleichverteilten Wert U zwischen null und eins erzeugen und einen Erfolg zählen, wenn U < p gilt. Wird dieser Schritt n-mal wiederholt, entsteht eine simulierte Reihe im gewählten numerischen Modell. Durch die Wiederholung ganzer Reihen lässt sich die Verteilung der Erfolgszahlen oder Häufigkeiten beobachten.

Die verwendeten Zahlen sind im Allgemeinen pseudozufällig: Sie stammen aus einem deterministischen Mechanismus, der mit einem Startwert, dem Seed, initialisiert wird. Ein fester Seed kann eine Untersuchung leichter reproduzierbar machen. Das macht den Generator nicht für jede Anwendung geeignet, insbesondere nicht für solche mit Sicherheitsanforderungen. Hier dient er ausschließlich einer didaktischen Erkundung.

Eine Simulation erlaubt es, eine Beziehung zu vermuten, eine Formel zu prüfen oder Streuung zu beobachten. Sie beweist keine Identität, die für jeden Parameter gilt. Tritt ein seltenes Ereignis in keiner der tausend simulierten Reihen auf, lässt sich daraus nicht auf eine Wahrscheinlichkeit von null schließen. Die Zahl der Reihen und ihre Schwankungen müssen bei der Schlussfolgerung genannt werden.

Auch ein Integral lässt sich durch Simulation schätzen. Für U gleichverteilt auf [0,1] ist der Erwartungswert von U² das Integral von x² über dieses Intervall, also ein Drittel. Das Mittel vieler Werte von U² nähert sich unter den Modellbedingungen dieser Größe. Die Einzelvarianz beträgt 1/5 − 1/9 = 4/45; bei zehntausend unabhängigen Beobachtungen beträgt die theoretische Standardabweichung des Mittelwertes ungefähr 0,00298. Ein Ergebnis nahe 0,33 ist zu erwarten, beweist aber nicht das exakte Ergebnis.

10. Numerische Stabilität und unabhängige Prüfungen

Eine exakte Identität kann zu einer empfindlichen numerischen Rechnung führen. Beim Subtrahieren zweier sehr naher Zahlen können signifikante Stellen verloren gehen. Riesige Fakultäten zu berechnen und anschließend zu dividieren, kann die Kapazität einer Darstellung überschreiten, obwohl der endgültige Binomialkoeffizient noch handhabbar ist. Auch Reihenfolge und Organisation der Operationen sind deshalb wichtig.

Für eine Binomialverteilung mit $0 < p < 1$ können wir mit $q_0 = (1 - p)^n$ beginnen und nacheinander $q_{k+1} = q_k \times (n - k)/(k + 1) \times p/(1 - p)$ berechnen. Diese Rekursion vermeidet die wiederholte Berechnung von Fakultäten. Sie löst nicht jedes Problem: Bei sehr großem n kann q_0 numerisch zu klein werden, sodass eine andere Behandlung nötig wäre. Die Fälle $p = 0$ und $p = 1$ sind getrennt zu behandeln.

Eine nützliche Prüfung kontrolliert, ob alle Wahrscheinlichkeiten positiv sind und ihre Summe innerhalb der verfügbaren Genauigkeit nahe bei eins liegt. Wir können den aus der Verteilung berechneten Erwartungswert prüfen und mit n p vergleichen. Diese Kontrollen ersetzen keinen Beweis des Algorithmus, erkennen aber Parameter- oder Indexfehler.

Für die Quadratwurzel aus zwei liefert eine Newton-Iteration $u_{n+1} = (u_n + 2/u_n)/2$ mit $u_0 = 1$. Die ersten Werte sind 1,5 und anschließend ungefähr 1,41667. Ab u_1 bleiben die Werte oberhalb von $\sqrt{2}$ und nehmen ab. Setzt man $e_n = u_n - \sqrt{2}$, lässt sich $e_{n+1} = e_n^2/(2u_n)$ nachweisen; diese Beziehung erklärt die schnelle Verbesserung in diesem Fall. Sie rechtfertigt keine Konvergenzgarantie für jede Newton-Methode bei jeder Funktion.

11. Aufgaben mit Lösungen und Diskussion

Aufgabe A. Zwei Gruppen mit zehn beziehungsweise dreißig Personen haben die Mittelwerte zwölf und sechzehn. Der Gesamtmittelwert beträgt (10 × 12 + 30 × 16)/40, also fünfzehn. Vierzehn, das ungewichtete Mittel der beiden Mittelwerte, würde den Gruppen trotz ihrer unterschiedlichen Größen dasselbe Gewicht geben.

Aufgabe B. Eine Variable hat den Erwartungswert zehn und die Varianz vier. Welche obere Schranke liefert Bienaymé-Tschebyscheff für eine Abweichung von mindestens fünf? Die Schranke beträgt 4/25 = 0,16. Richtig ist die Aussage, dass die Wahrscheinlichkeit höchstens 16% beträgt. Falsch wäre, sie betrage genau 16% oder 84% der Werte müssten im zentralen Intervall gleichverteilt sein.

Aufgabe C. Unabhängige, identisch verteilte Variablen haben die Varianz neun. Für ihren Mittelwert aus hundert Beobachtungen beträgt die Varianz 0,09 und die Standardabweichung 0,30. Bei vierhundert Beobachtungen beträgt die Standardabweichung 0,15. Ihre Halbierung entspricht einer Vervierfachung des Stichprobenumfangs, passend zur Abhängigkeit von der Quadratwurzel.

Aufgabe D. Begrenze für eine Bernoulli-Häufigkeit mit Parameter p = 0,40 und n = tausend die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung von mindestens 0,05. Es ergibt sich 0,40 × 0,60/(1 000 × 0,05²) = 0,096. Die einheitliche Schranke wäre 0,10. Die Kenntnis von p verbessert diese obere Schranke etwas, liefert aber nicht die exakte Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe E. Ein Programm setzt v zunächst auf eins und multipliziert v mit 0,5, solange v ≥ 0,125 gilt. Es stoppt nach vier Multiplikationen bei v = 0,0625. Um den ersten Index zu finden, bei dem v ≤ 0,125 gilt, muss die Prüfung v > 0,125 lauten; dann

stoppt es nach drei Multiplikationen. Die Untersuchung des Gleichheitsfalls zeigt den Unterschied zwischen den Fragen.

Aufgabe F. Hundert Freiwillige entscheiden sich nach der Lektüre einer Nachricht über eine von ihnen erlebte Schwierigkeit, an einer Befragung teilzunehmen. Lässt sich für alle Nutzer eine Garantie unabhängiger, repräsentativer Stichprobenziehung anwenden? Nicht ohne Begründung. Die Freiwilligen können andere Merkmale haben als diejenigen, die nicht antworten. Eine größere Zahl Freiwilliger beseitigt diese Verzerrung nicht automatisch.

12. Eine Zusammenfassung zur Wiederholung erstellen

Bereite für jeden Begriff eine Definition, eine Eigenschaft mit ihren Voraussetzungen, einen kurzen Beweis, eine Aufgabe und ein Gegenbeispiel vor. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann sich das Gegenbeispiel auf Unabhängigkeit beziehen, in der Analysis auf fehlende Stetigkeit, in der Geometrie auf einen zu Unrecht angenommenen Schnittpunkt und bei Algorithmen auf eine falsch übersetzte Schleifenbedingung.

Eine gute Zusammenfassung zählt nicht jede Formel auf. Sie wählt die zur Frage passende Formel und erklärt, warum die anderen nicht ausreichen würden. Sie erhält die Unterscheidung zwischen Beweis, Näherung und Simulation. Abschließend prüft sie, ob die Antwort mit angemessener Genauigkeit und Deutung auf das ursprüngliche Problem eingeht.

Lehrplan und methodische Quellen

Französischer Lehrplan des Mathematik-Schwerpunktfachs in der Terminale zu Konzentration, Gesetz der großen Zahlen und Algorithmen; alle Situationen und Erklärungen sind eigenständig verfasst: https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

NIST, beschreibende Hinweise zu Lagemaßen, zur Unterscheidung von Mittelwert und Median herangezogen, ohne den Wortlaut zu übernehmen:

https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/eda/section3/eda351.htm

Anhänge - Vertiefende Probleme, ausgearbeitete Lösungen und Lernstrategien

A. Eine Funktionenschar mit Parameter untersuchen

Betrachte f_a(x) = ln x − a x auf den strikt positiven reellen Zahlen, wobei a ein strikt positiver Parameter ist. Wir müssen die Unbekannte x vom Parameter a unterscheiden. Bei der Untersuchung einer Funktion der Schar bleibt a fest. Die Ableitung lautet f_a'(x) = 1/x − a; sie ist vor x = 1/a positiv, an dieser Stelle null und danach negativ.

Die Funktion hat daher bei 1/a ein Maximum. Sein Wert ist ln(1/a) − 1 beziehungsweise −ln a − 1. Der Grenzwert bei Annäherung an null von der positiven Seite ist minus unendlich. Auch der Grenzwert für x gegen plus unendlich ist minus unendlich, weil bei festem positivem a der negative lineare Term gegenüber dem Logarithmus überwiegt. Diese Grenzwerte und die Monotonieintervalle ermöglichen es, die Lösungen von f_a(x) = 0 zu zählen.

Für a < 1/e ist das Maximum strikt positiv. Stetigkeit und strenge Monotonie auf jedem der beiden Intervalle liefern dann zwei verschiedene Lösungen, eine vor 1/a und die andere danach. Für a = 1/e ist das Maximum null: Die einzige Lösung ist x = e. Für a > 1/e ist das Maximum negativ, und es existiert keine Lösung. Wir haben die gesamte Schar eingeordnet, ohne jede Nullstelle ausdrücklich berechnen zu müssen.

Die Überlegung trennt Existenz und Eindeutigkeit. Stetigkeit mit Werten entgegengesetzter Vorzeichen gewährleistet eine Nullstelle; strenge Monotonie auf dem betrachteten Intervall gewährleistet, dass es nicht zwei geben kann. Maximum und

Grenzwerte erlauben die Entscheidung, auf welchen Intervallen diese Argumente anwendbar sind. Eine bloße Betrachtung des Graphen könnte das Ergebnis nahelegen, würde es aber nicht für jeden Parameter begründen.

Die zweite Ableitung ist $-1/x^2$: Alle Funktionen dieser Schar sind streng konkav. Im Grenzfall $a = 1/e$ berührt die Kurve die Achse an ihrem Maximum. Für die Existenz einer Nullstelle ist ein Vorzeichenwechsel also nicht notwendig. Dieses Beispiel ergänzt die Methode des Zwischenwertsatzes durch eine Situation, in der eine allein auf entgegengesetzte Vorzeichen gestützte Suche die Lösung übersehen würde.

Zur Wiederholung untersuche das Problem erneut mit ln x + a x für positives a. Die Ableitung wird zu 1/x + a und ist stets positiv. Die Grenzwerte reichen von minus unendlich bis plus unendlich, sodass die Gleichung genau eine Lösung hat. Ein Vorzeichenwechsel im Ausdruck verändert die Struktur des Problems; das vorherige Monotonieschema ohne neue Rechnung zu übernehmen, wäre ein Fehler.

B. Eine durch einen Bruch definierte Folge mit begründetem Grenzwertargument

Definiere $u_0 = 1$ und u_(n+1) = (2u_n + 3)/(u_n + 2). Bevor wir einen Grenzwert suchen, müssen wir zeigen, dass alle Glieder existieren, und ihren Wertebereich kontrollieren. Die Funktion φ(x) = (2x + 3)/(x + 2) ist auf [1,√3] definiert, weil ihr Nenner dort positiv ist. Ihre Ableitung lautet $1/(x + 2)^2$, sie ist also auf diesem Intervall monoton steigend.

Es gilt φ(1) = 5/3 und φ(√3) = √3. Wegen 1 ≤ 5/3 ≤ √3 bildet die Funktion das Intervall in sich selbst ab. Vollständige Induktion beweist daher, dass jedes Folgenglied zwischen eins und √3 liegt.

Die Rechnung mit dieser Funktion ist nun bei jedem Schritt zulässig.

Die Differenz $\varphi(x) - x$ lautet $(3 - x^2)/(x + 2)$. Sie ist auf $[1,\sqrt{3}]$ nicht negativ. Folglich gilt $u_{n+1} \geq u_n$: Die Folge ist monoton steigend und nach oben beschränkt. Sie konvergiert daher gegen einen Grenzwert ℓ in diesem Intervall. Erst jetzt erlaubt die Stetigkeit von φ, $\ell = \varphi(\ell)$ zu schreiben.

Die Fixpunktgleichung führt zu $\ell^2 = 3$. Die beiden algebraischen Lösungen sind $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$, doch der Grenzwert gehört zu $[1,\sqrt{3}]$. Er ist deshalb $\sqrt{3}$. Die Gleichung gleich zu Beginn zu lösen, hätte mögliche Werte geliefert, aber weder die Existenz eines Grenzwertes bewiesen noch den richtigen Kandidaten ausgewählt.

Die ersten Glieder lauten $u_1 = 5/3$, $u_2 = 19/11$ und $u_3 = 71/41$, ungefähr 1,6667, 1,7273 und 1,7317. Sie stimmen mit dem Beweis überein, ersetzen ihn aber nicht. Eine Reihe scheinbar stabilisierter Werte reicht nicht aus, um die Konvergenz für jeden späteren Schritt zu begründen.

Eine Erweiterung kann die Differenz zwischen Funktionswerten auf dem Intervall durch eine Konstante kleiner als eins begrenzen. Die Ableitung beträgt dort höchstens 1/9, was auf eine starke Kontraktion hinweist. Diese Technik geht über die Hauptanforderungen der Aufgabe hinaus und muss als Erweiterung dargestellt werden. Die Lösung auf dem Niveau der französischen Terminale beruht bereits auf Invarianz, Monotonie, oberer Beschränktheit und Stetigkeit.

C. Optimierung mit einer geometrischen Nebenbedingung

Eine fiktive rechteckige Platte soll eine Fläche von 48 Flächeneinheiten haben. Gesucht ist unter den Rechtecken mit strikt positiven Seiten dasjenige mit dem kleinsten Umfang. Ist eine Seite x, so beträgt die andere 48/x, und der Umfang lautet $P(x) = 2x + 96/x$ für positives x. Der Definitionsbereich gehört zum Modell; null und negative Werte beschreiben kein zulässiges Rechteck.

Die Ableitung lautet $2 - 96/x^2$. Sie wird bei $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ null, ist davor negativ und danach positiv. Das globale Minimum wird daher bei einem Quadrat erreicht, dessen beide Seiten $4\sqrt{3}$ lang sind und dessen Umfang $16\sqrt{3}$ beträgt. Die unendlichen Grenzwerte an beiden Enden des Definitionsbereichs stimmen mit dem Ergebnis überein; das Monotonieschema genügt aber bereits, um das Minimum nachzuweisen.

Ein Beweis ohne Differenzieren verwendet die Ungleichung $x + 48/x \geq 2\sqrt{48}$ für positives x, die durch Entwicklung eines geeignet gewählten Quadrats entsteht. Gleichheit setzt $x = 48/x$ voraus. Beide Wege beweisen dasselbe Ergebnis; der zweite kann die Symmetrie des Problems verdeutlichen, während der erste leicht auf andere Kostenfunktionen übertragbar ist.

Nehmen wir nun an, eine Seite müsse mindestens zehn betragen. Der Definitionsbereich wird zu $x \geq 10$. Weil zehn größer als $4\sqrt{3}$ ist, steigt die Funktion dort, und das Minimum unter dieser Nebenbedingung liegt bei $x = 10$; die andere Seite beträgt 4,8. Das optimale Rechteck ist kein Quadrat mehr. Eine Schlussfolgerung ohne Berücksichtigung des Definitionsbereichs zu übernehmen, würde eine unzulässige Antwort liefern.

Stellen die Seiten reale Abmessungen dar, können schließlich Dicke, Ränder, Materialkosten und Fertigungsbedingungen das Ziel verändern. Das mathematische Problem ist innerhalb seiner

Definition exakt; bei der Anwendung muss geprüft werden, ob diese Definition dem Bedarf entspricht. Eine Optimierung wählt das richtige Kriterium nicht selbst aus.

D. Eine Wahrscheinlichkeit für eine Entscheidung und ihre Voraussetzungen

Ein fiktives System erfüllt eine Aufgabe, wenn zwei unabhängige Komponenten funktionieren, jede mit Wahrscheinlichkeit 0,90. Sind beide unverzichtbar, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das System funktioniert, 0,81. Genügt eine, und ist das Ersatzmodell richtig durch das Ereignis „Mindestens eine funktioniert“ beschrieben, beträgt die Wahrscheinlichkeit $1 - 0{,}10^2 = 0{,}99$.

Diese Ergebnisse sind keine zwei konkurrierenden Schätzungen für dieselbe Anordnung. Die Betriebsereignisse unterscheiden sich. Die erste Konfiguration entspricht dem Schnitt der beiden Ereignisse, die zweite dem Gegenereignis des Ausfalls beider Komponenten. Die Rollen der Komponenten zu bestimmen, geht deshalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraus.

Auch die Unabhängigkeit ist eine wichtige Annahme. Hängen die Komponenten von derselben Stromversorgung ab, die ausfallen kann, sind ihre Zustände nicht mehr notwendigerweise unabhängig. Eine Rechnung, die ohne Berücksichtigung dieser gemeinsamen Ursache bei 0,99 bleibt, kann die Zuverlässigkeit überschätzen. Das Problem lässt sich nicht durch eine beliebige Anpassung der Nachkommastellen beheben; das Modell muss überarbeitet werden.

Bei einem Verfahren aus zehn unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit 0,90 beträgt die Wahrscheinlichkeit für zehn Erfolge $0{,}90^{10}$, ungefähr 34,9%. Eine hohe Wahrscheinlichkeit bei jedem Versuch bedeutet daher keine Sicherheit des Erfolgs in der gesamten Reihe. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen

Misserfolg beträgt ungefähr 65,1%. Diese Ergebnisse widersprechen nicht der Tatsache, dass die erwartete Erfolgszahl neun ist.

Diese Unterscheidung lässt sich anhand dreier Fragen erklären: Erfolg bei einem Versuch, mittlere Erfolgszahl und Erfolg bei jedem Versuch. Sie verwenden dieselben Parameter, beschreiben aber unterschiedliche Ereignisse oder Kennwerte. Eine genaue Darstellung benennt die beantwortete Frage und verwendet nicht ein Ergebnis als Antwort auf alle drei.

E. Geometrie und Optimierung eines Abstandes

In einem orthonormalen Koordinatensystem ist der Punkt $M = (2,-1,3)$ fest, und eine Gerade wird durch $H(t) = (t, t, 0)$ beschrieben. Das Quadrat des Abstandes lautet $D(t) = (t - 2)^2 + (t + 1)^2 + 9 = 2t^2 - 2t + 14$. Die Untersuchung der Ableitung ergibt $D'(t) = 4t - 2$ und damit ein Minimum bei $t = 1/2$.

Der nächstgelegene Punkt ist $H = (1/2,1/2,0)$. Das Abstandsquadrat beträgt 13,5 und der Abstand $\sqrt{13,5}$. Der Vektor $MH = (-3/2,3/2,-3)$ hat mit dem Richtungsvektor $(1,1,0)$ das Skalarprodukt null. Die algebraische Optimierung liefert somit die orthogonale Projektion; die geometrische Bedingung ermöglicht eine unabhängige Prüfung.

Betrifft das Problem nur die Strecke mit t zwischen eins und zwei, ist $t = 1/2$ unzulässig. Die Funktion D steigt auf dieser Strecke; ihr Minimum dort wird bei $t = 1$ im Punkt $(1,1,0)$ erreicht. Das Abstandsquadrat beträgt vierzehn. Ein Minimum auf einer Geraden beantwortet nicht automatisch eine Frage über eine Strecke.

Mit dem Abstandsquadrat zu arbeiten ist nützlich, weil die Quadratwurzel auf nicht negativen Zahlen monoton steigt: D zu minimieren ist gleichbedeutend damit, $\sqrt{D}$ zu minimieren. Das vereinfacht die Rechnung, ohne das Ziel zu ändern. Die

Begründung muss genannt werden; man darf nicht annehmen, dass bei jedem Optimierungsproblem eine äußere Funktion entfernt werden kann.

F. Eine Ungleichung beweisen und Gleichheitsfälle erkennen

Für jedes positive x wollen wir $x \ln x - x + 1 \geq 0$ nachweisen. Definiere $g(x) = x \ln x - x + 1$. Die Ableitung lautet $\ln x$. Sie ist auf $(0,1)$ negativ, bei eins null und auf $(1,+\infty)$ positiv. Die Funktion hat daher bei eins ein globales Minimum, und $g(1) = 0$. Die Ungleichung ist bewiesen; Gleichheit gilt nur für $x = 1$.

Die zweite Ableitung ist $1/x$ und positiv. Das Ergebnis lässt sich auch über die Konvexität von $x \ln x$ deuten: Die Tangente bei eins hat die Gleichung $y = x - 1$, und die Kurve bleibt oberhalb davon. Die beiden Beweise drücken Aspekte derselben Überlegung aus. Der erste verwendet Monotonie, der zweite eine geometrische Eigenschaft konvexer Funktionen.

Die Bedingung $x > 0$ ist wesentlich, damit der Logarithmus definiert ist. Man könnte eine stetige Fortsetzung von $x \ln x$ bei null untersuchen, müsste sie aber konstruieren und angeben; sie darf nicht stillschweigend im ursprünglichen Beweis verwendet werden. Definitionsbereiche sind mehr als Vorsichtsmaßnahmen bei der Darstellung: Sie bestimmen, wo die Objekte existieren.

Den Gleichheitsfall zu erkennen ist bei der Optimierung oft entscheidend. Eine untere Schranke ohne Bedingung für ihr Erreichen genügt nicht immer, um eine Lösung zu bestimmen. Hier wird die Schranke null erreicht, und die Eindeutigkeit folgt aus der strengen Monotonie auf beiden Seiten. Eine gute ausgearbeitete Lösung unterscheidet drei Tatsachen: die Schranke, ihr Erreichen und die Eindeutigkeit.

G. Eine ausführliche Lösung in mehreren Schritten vorbereiten

Lege bei einer zusammenfassenden Aufgabe zunächst die Abhängigkeiten dar: Welche Frage verwendet welches vorherige Ergebnis? Die Berechnung eines Grenzwertes kann ein Vorzeichen bestimmen, das die Existenz einer Nullstelle begründet, für die anschließend Schranken gefunden werden. Ist ein Zwischenergebnis gegeben oder zugelassen, kann es manchmal für die Fortsetzung verwendet werden; dabei ist klar zu benennen, was unbewiesen bleibt.

Behalte exakte Werte, wenn die folgenden Schritte sie verwenden. Zu frühes Runden kann eine ganzzahlige Schwelle verschieben oder eine sehr kleine Differenz verändern. Gib Näherungen am Ende mit einem passenden Zeichen an. Treten mehrere algebraische Lösungen auf, kehre zum Definitionsbereich und zu den Bedingungen des Problems zurück, um zu entscheiden, welche zulässig sind.

Halte bei der Verwendung eines Rechenwerkzeugs fest, was es tatsächlich getan hat: Auswertung, Zeichnung, näherungsweise Lösung oder Simulation. Ein Graph, der einen einzigen Schnittpunkt zu zeigen scheint, ist kein Eindeutigkeitsbeweis. Eine Liste von zehn Gliedern ist kein Konvergenzbeweis. Das Werkzeug kann die Auswahl eines Beweises unterstützen und ein Ergebnis prüfen; es verwandelt eine Beobachtung nicht in einen allgemeinen Satz.

H. Durch erklärte Fehler lernen

Führe ein kurzes Fehlerheft nach Kategorien: vergessener Definitionsbereich, umgekehrte Implikation, fehlende Voraussetzung, Schleifenbedingung, falsch übersetztes Ereignis, Verwechslung von Punkt und Vektor, vorzeitiges Runden. Notiere zu jedem Fehler ein falsches Beispiel und seine begründete Korrektur. Das Ziel ist, die Fehlerstruktur in einer anderen Aufgabe wiederzuerkennen, statt nur eine Antwort auswendig zu lernen.

Wechsle zwischen Problemen, bei denen eine vertraute Technik funktioniert, und solchen, bei denen sie unpassend wäre. Vergleiche bei der Binomialverteilung das Ziehen mit und ohne Zurücklegen. Vergleiche bei der Optimierung einen offenen Definitionsbereich mit einem Bereich unter Nebenbedingungen. Vergleiche beim Integral den geometrischen Flächeninhalt mit der vorzeichenbehafteten Akkumulation. Dieser Wechsel lehrt die Auswahl einer Methode statt ihrer automatischen Anwendung.

Eine nützliche persönliche Überprüfung besteht darin, eine Aufgabe einige Tage nach der Lektüre erneut zu lösen und dann zu erklären, warum eine andere mögliche Methode länger oder unzureichend ist. Das prüft die eigenständige Rekonstruktion der Überlegung. Ein Gefühl von Leichtigkeit beim Lesen kann daher kommen, dass die Lösung bereits vorliegt, und darf nicht mit selbstständiger Beherrschung verwechselt werden.

Der Leitfaden bietet Beispiele und Methoden, kein Versprechen schulischer Ergebnisse. Eine richtige Antwort muss auch klar, relevant und schlüssig sein: Sage, was du beweist, prüfe, ob deine Voraussetzungen zur Frage passen, und schließe mit der genauen Reichweite des Ergebnisses. Diese Anforderung bleibt nützlich, selbst wenn die Rechnungen bereits richtig sind.